Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Tópicos em Análise Complexa - Verão/25

Lista 1 - 11/01/2025 - Valor: 5 pts.

Instruções. A lista deve ser entregue individualmente. As respostas devem ser manuscritas em letra legível. **Não** serão aceitas listas entregues em formato digital e ou impressas. Respostas sem justificativas serão desconsideradas. As justificativas devem ser completas, escritas de maneira clara, organizada e baseadas apenas nos resultados apresentados até a última aula.

Questões

1. **(1 pt)** A família de aplicações introduzida neste exercício desempenha um papel importante na Análise Complexa. Esta aplicações, comumente chamadas de **fatores de Blaschke**, irão reaparecer diversas vezes à frente no curso.

   a) Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ satisfazendo $\overline{z}w \neq 1$. Prove que
   $$\text{se } |z| < 1 \ \text{ e } \ |w| < 1, \text{ então } \qquad \left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| < 1$$

   b) se pelo menos um dos números complexos z, w pertence à $\partial\mathbb{D} \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, e também é satisfeita a relação $\overline{z}w \neq 1$, então temos
   $$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| = 1$$

   c) Fixe $w \in \mathbb{D} \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e considere o conjunto $U \equiv \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \overline{z}w \neq 1\}$ e a função $F : U \to \mathbb{C}$ dada por
   $$F(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z}.$$
   Mostre que

   c1) mostre que F manda o disco unitário $\mathbb{D}$ nele mesmo, isto é, $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ e que a restrição $F|_{\mathbb{D}} \equiv f$ define uma aplicação holomorfa em todo disco $\mathbb{D}$;

   c2) mostre F mapeia 0 em w e vice-versa, isto é, $F(0) = w$ e $F(w) = 0$;

   c3) mostre que F envia o bordo do disco unitário nele mesmo, isto é, $F(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}$;

   c4) mostre que restrição de F ao disco unitário, $F|_{\mathbb{D}} \equiv f$ induz uma bijeção $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa. Dica: Calcule $f \circ f$.

2. **(1 pt)** Seja $w \in \mathbb{C}$ um número complexo fixado. Considere a representação polar de $w = \rho e^{i\theta}$, onde $\rho \geqslant 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural fixado. Obtenha, representada em coordenadas polares, todas as soluções da equação algébrica $z^n = w$.

3. **(1 pt)** Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ um aberto (não necessariamente conexo) e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Prove que sob qualquer uma das seguintes hipóteses:

   a) $\mathrm{Re}(f)$ é identicamente constante;

   b) $\mathrm{Im}(f)$ é identicamente constante;

   c) $|f|$ é identicamente constante;

   podemos concluir que $f \equiv K$, onde $K \in \mathbb{C}$ é uma constante.

4. **(1 pt)** Seja $f : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ a função definida pela série de potências,dada abaixo, em seu disco de convergência (assuma que o raio de convergência desta série de potências é estritamente positivo, isto é, $R > 0$)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z \in B(z_0, R) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

   a) mostre que a sequência das reduzidas da série acima convergem uniformemente nas partes compactas para f. Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a função $S_n : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ dada por $S_n(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n$. Mostre que

$$S_n \xrightarrow[\substack{\text{unif.}\\ \text{compact.}}]{n \to \infty} f.$$

   b) Sejam $f : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções holomorfas definidas sobre $B(z_0, R)$, que converge uniformemente nas partes compactas de $B(z_0, R)$ para uma função $g : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$, isto é,

$$g_n \xrightarrow[\substack{\text{unif.}\\ \text{compact.}}]{n \to \infty} g.$$

   Mostre que se γ é um círculo centrado em z_0 e raio $r < R$, então todas as integrais que aparecem abaixo existem e valem as seguintes igualdades

$$\int_\gamma f(w) g(w)\, dw = \int_\gamma f(w) \lim_{n \to \infty} g_n(w)\, dw = \lim_{n \to \infty} \int_\gamma f(w) g_n(w)\, dw.$$

   c) Para cada $z \in B(z_0, R)$ fixado podemos encontrar um círculo γ centrado em z_0 e de raio $\rho > 0$, envolvendo z, com $\gamma \subset D(z_0, R)$ e satisfazendo

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1, \qquad \forall w \in \gamma.$$

   d) Sob as condições do item c) mostre que as integrais que aparecem abaixo existem e usando os itens a) e b) que vale a seguinte igualdade:

$$\int_\gamma f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^n}\, dw \right) (z - z_0)^n.$$

   e) Use os itens anteriores para provar o Teorema 4.4 (analiticidade das funções holomorfas) do livro do texto.

5. **(1 pt)** Enuncie e demonstre o Teorema de Morera.