Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Tópicos em Análise Complexa - Verão/25

Lista 2 - 20/01/2025 - Valor: 5 pts.

Instruções. A lista deve ser entregue individualmente. As respostas devem ser manuscritas em letra legível. **Não** serão aceitas listas entregues em formato digital e ou impressas. Respostas sem justificativas serão desconsideradas. As justificativas devem ser completas, escritas de maneira clara, organizada e baseadas apenas nos resultados apresentados até a última aula.

Questões

1. **(1 pt)** Prove que a função Zeta de Riemann $\zeta : \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

é holomorfa.

2. **(1 pt)** Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ uma região (aberto e conexo), $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções holomorfas definidas em U que converge uniformemente nas partes compactas para f, isto é,

$$f_n \xrightarrow[\substack{\text{unif.}\\ \text{compact}}]{n\to\infty} f$$

Mostre que se para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que f_n não se anula em U, então temos uma das seguintes alternativas: f é identicamente nula ou f não se anula em U.

3. **(1 pt)**

   a) Demonstre o Teorema de Casorati-Weierstrass.
   Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ e $A(z_0, 0, \rho) \equiv \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \rho\}$ e $f : A(z_0, 0, \rho) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se z_0 é uma singularidade essencial de f, então para todo $0 < \delta < \rho$ temos que $\overline{f(A(z_0, 0, \delta))} = \mathbb{C}$, isto é, a imagem de qualquer anel aberto da forma $A(z_0, 0, \delta))$, com $0 < \delta < \rho$, é um subconjunto denso de $\mathbb{C}$.
   Dica: veja pág. 86 do livro texto;

   b) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira. Mostre que se f é injetiva, então existem constantes $a, b \in \mathbb{C}$, com $a \neq 0$ tal que $f(z) = az + b$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

   (Dica: Use o Teorema de Casorati-Weierstrass para $f(1/z)$. Observe que é necessário mostrar que $z = 0$ é uma singularidade essencial do mapa $z \longmapsto f(1/z)$. Para isto, use a hipótese de injetividade para concluir que f não pode ser um polinômio)

4. **(1 pt)** Fixe $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Considere a região $U \equiv \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup \{-a\})$ e a função $g : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z+a)^2}.$$

a) Para cada $k \in \mathbb{Z}$, mostre que $z = k$ é um polo simples de g e que

$$\operatorname{res}(g, k) = \frac{1}{(k+a)^2}.$$

b) Mostre que $z = -a$ é um polo de ordem 2 da função g e que

$$\operatorname{res}(g, -a) = \frac{-\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}.$$

c) Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > a$. Seja $\gamma_n \subset \mathbb{C}$ a curva orientada no sentido anti-horário e determinado pelos lados do retângulo de vértices:

$$n + \frac{1}{2} + ni, \quad -n - \frac{1}{2} + ni, \quad -n - \frac{1}{2} - ni, \quad n + \frac{1}{2} - ni.$$

Faça um esboço deste contorno e argumente que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} g(z)\, dz = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(k+a)^2} - \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}.$$

d) Se $z = x + iy$. Mostre que $|\cos z| = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$ e que $|\operatorname{sen} z| = \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{senh}^2(y)$. Usando estas identidades mostre que se $z \in \gamma_n$ (para n suficientemente grande), então $|\cot(\pi z)| \leqslant 2$. Em seguida, usando esta estimativa, encontre uma cota superior para $\int_{\gamma_n} |g(z)|\, |dz|$ e conclua que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} g(z)\, dz = 0.$$

e) Use os itens anteriores para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2}.$$

f) Tomando $a = \frac{1}{2}$ no item acima, conclua que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. **(1 pt)** Sejam $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ arbitrários, mas com pelo menos um destes números complexos sendo não-nulo.

a) Mostre que: $\left|\prod_{j=1}^{n}(1+z_j)\right| \leqslant \exp\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|\right)$.
(Dica: prove que para todo $x \geqslant 0$, temos $1 + x \leqslant e^x$)

b) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira e $\lambda \in [0, 1]$. Mostre que para todo $R > 0$ temos:

$$|f'(\lambda)| \leqslant \frac{1}{R} \sup_{|z|=R+1} |f(z)|.$$

c) Usando a desigualdade acima, prove que

$$|f(1) - f(0)| \leqslant \frac{1}{R} \sup_{|z|=R+1} |f(z)|.$$

d) Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n}(1 + zz_j).$$

Usando os itens anteriores prove que

$$|f(1) - f(0)| \leqslant \frac{1}{R} \exp\left((R+1)\sum_{j=1}^{n}|z_j|\right).$$

e) Usando os itens anteriores e fazendo uma escolha apropriada para R conclua que vale a seguinte desigualdade:

$$\left|\prod_{j=1}^{n}(1+z_j) - 1\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|\right) \exp\left(1 + \sum_{j=1}^{n}|z_j|\right).$$