Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Tópicos em Análise Complexa - Verão/25

Lista 3 - 31/01/2025 - Valor: 5 pts.

Instruções. A lista deve ser entregue individualmente. As respostas devem ser manuscritas em letra legível. **Não** serão aceitas listas entregues em formato digital e ou impressas. Respostas sem justificativas serão desconsideradas. As justificativas devem ser completas, escritas de maneira clara, organizada e baseadas apenas nos resultados apresentados até a última aula.

Questões

1. **(1/2 pt)** Prove a validade da Fórmula de Jensen para funções holomorfas definidas em $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, usando os chamados fatores de Blaschke

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

   Para isto olhe para funções do tipo

$$\mathbb{D} \ni z \longmapsto \frac{f(z)}{\psi_{z_1}(z) \cdot \ldots \cdot \psi_{z_n}(z)},$$

   onde $z_1, \ldots, z_n$ são números complexos escolhidos apropriadamente.

2. **(1/2 pt)** Usando a Fórmula de produto para a função $z \longmapsto \text{sen}(z)$, calculada em $z = \pi/2$, mostre a validade da chamada Fórmula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1) \cdot (2m+1)} \cdots$$

3. **(1 pt)** Estabeleça as seguintes propriedades de produtos infinitos:

   a) Seja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{C}$ tal que $\sum_{n=1}^\infty |a_n| < +\infty$ e $a_n \neq -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\prod_{n=1}^\infty (1 + a_n)$ converge para algum número complexo não-nulo se, e somente se, $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge;

   b) Encontre um exemplo de uma sequência de números complexos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge, mas $\prod_{n=1}^\infty (1 + a_n)$ diverge;

   c) Encontre um exemplo de uma sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números complexos tal que $\prod_{n=1}^\infty (1 + a_n)$ converge, mas a série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge.

4. **(1/2 pt)** Usando o Teorema da Fatoração de Hadamard decomponha como produtos as seguintes funções inteiras:

   a) $f(z) = e^z - 1$;

   b) $g(z) = \cos(\pi z)$.

   Respostas:

$$f(z) = \exp\left(\frac{z}{2}\right) z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right) \qquad \text{e} \qquad g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right).$$

5. **(1/2 pt)** Demostre o Pequeno Teorema de Picard. Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função inteira de ordem de crescimento finita e f omite dois pontos do plano complexo, então f é uma função constante.
   (Dica: Mostre que se f omite um ponto $a \in \mathbb{C}$, então $g(z) \equiv f(z) - a$ é da forma $g(z) = \exp(P(z))$, onde $z \longmapsto P(z)$ é uma função polinomial).

6. **(1/2 pt)** Mostre que a equação $e^z - z = 0$, possui infinitas soluções em $\mathbb{C}$.
   (Dica: use o Teorema de Fatoração de Hadamard.)

7. **(1/2 pt)** Prove que para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(s) > 1$ temos:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx.$$

   (Dica: mostre que a função $1/(e^x - 1)$ pode ser representada pela série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$)

8. **(1 pt)** Use o exercício anterior para obter uma outra prova de que a função zeta de Riemann inicialmente definida como $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\} \ni s \longmapsto \zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ admite uma continuação analítica à todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Além do mais, o ponto $s = 1$ é um polo simples da função zeta de Riemann e $\mathrm{res}(\zeta, 1) = 1$.
   Para isto use o seguinte roteiro: primeiro passo. Observe que segue do exercício anterior que para todo $s \in \mathbb{C}$ satisfazendo $\mathrm{Re}(s) > 1$, temos a seguinte igualdade:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{1} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx.$$

   Segundo passo. Mostre que a segunda parcela do lado direito da igualdade acima define uma função inteira. Terceiro passo. Mostre que a primeira parcela satisfaz a seguinte identidade:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{1} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!(s+m-1)},$$

   onde B_m denota o m-ésimo número de Bernoulli que é definido pela seguinte função geradora

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} x^m.$$

   Note que $B_0 = 1$ e já que $z/(e^z - 1))$ é holomorfa em $D(0, 2\pi)$, então temos pelo Fórmula do Raio de Convergência e pelo Teorema da Fórmula Integral de Cauchy que

$$\limsup_{m \to \infty} \left(\frac{B_m}{m!}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{2\pi}.$$