Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Tópicos em Análise Complexa - Verão/25

Lista 4 - 12/02/2025 - Valor: 5 pts.

Instruções. A lista deve ser entregue individualmente. As respostas devem ser manuscritas em letra legível. **Não** serão aceitas listas entregues em formato digital e ou impressas. Respostas sem justificativas serão desconsideradas. As justificativas devem ser completas, escritas de maneira clara, organizada e baseadas apenas nos resultados apresentados até a última aula.

Questões

1. **(1 pt)** Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, próprio ($\emptyset \subsetneq U \subsetneq \mathbb{C}$). Seja $f : U \to U$ um biholomorfismo. Mostre que se f possui dois pontos fixos distintos, então $f(z) = z$, para todo $z \in U$, isto é, f é a função identidade em U.

2. **(1 pt)** Suponha que U e V sejam conformalmente equivalentes. Prove que se U é simplesmente conexo, então V também é simplesmente conexo. Na verdade, esta conclusão permanece válida, mesmo que U e V sejam meramente homeomorfos.

3. **(1 pt)** Fixe $R > 0$. Mostre que se $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa arbitrária satisfazendo para todo $z \in D(0,R)$ a desigualdade $|f(z)| \leqslant M$, para alguma constante $M > 0$, então
$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{M^2 - \overline{f(0)} f(z)} \right| \leqslant \frac{|z|}{MR}.$$
(Dica: Use o Lema de Schwarz.)

4. **(1 pt)** A **pseudo-distância hiperbólica**. Dados $z, w \in \mathbb{D}$ definimos
$$\rho(z,w) \equiv \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right| \tag{1}$$

   a) mostre que se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é uma função holomorfa, então
   $$\rho(f(z), f(w)) \leqslant \rho(z,w), \qquad \forall z, w \in \mathbb{D}.$$
   (**Dica**: considere a aplicação conforme $\psi_\alpha(z) = (z-\alpha)/(1-\overline{\alpha} z)$ e aplique o Lema de Schwarz à aplicação $\psi_{f(w)} \circ f \circ \psi_w^{-1}$.)

   b) prove que
   $$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$
   Este resultado é conhecido como **Lema de Schwarz-Pick**.

5. **(1 pt)** Este exercício vai ajudar a interpretar o Lema de Schwarz-Pick como uma versão infinitesimal de alguns resultados interessantes conectando Análise Complexa e Geometria.

Para cada número complexo $z \in \mathbb{D}$ fixado e para cada $w \in \mathbb{D}$, defina $\|w\|_z$ da seguinte forma:

$$\|w\|_z \equiv \frac{|w|}{1-|z|^2}.$$

A ideia aqui é pensar em w como um vetor tangente, ao espaço, no ponto z e $\|w\|_z$ como o "comprimento hiperbólico" de w, em z. Note que para cada w fixado, seu comprimento hiperbólico cresce para infinito a medida que o ponto z se aproxima do bordo do disco. As vezes, nos referimos à quantidade $\|w\|_z$ como uma descrição infinitesimal da métrica hiperbólica em $\mathbb{D}$. A razão desta interpretação ficará mais clara no exercícios que seguem.

Agora, vamos passar da noção de "comprimento hiperbólico" (infinitesimal), de vetores tangentes, para para uma noção de distância hiperbólica global entre dois pontos de $\mathbb{D}$, por meio de um processo de integração.

a) Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, definimos a distância hiperbólica entre eles pela expressão

$$\mathrm{d}(z_1, z_2) \equiv \inf_{\gamma} \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt,$$

onde o ínfimo acima é tomado sobre todas as curvas suaves $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$, unindo z_1 à z_2.

Mostre que a aplicação $\mathrm{d} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to [0, +\infty)$ define uma distância em $\mathbb{D}$. Em seguida, usando o Lema de Schwarz-Pick, mostre que se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é uma função holomorfa, então

$$\mathrm{d}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \mathrm{d}(z_1, z_2).$$

Conclua que funções holomorfas de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{D}$ são contrações fracas.

b) prove que qualquer biholomorfismo do disco unitário aberto define, na verdade, uma aplicação isométrica (com respeito, à métrica hiperbólica), isto é,

$$\mathrm{d}(f(z_1), f(z_2)) = \mathrm{d}(z_1, z_2), \qquad \forall z, w \in \mathbb{D}.$$

Reciprocamente, mostre que se $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é uma isometria, com respeito a métrica hiperbólica, então φ ou $\overline{\varphi}$ define uma biholomorfismo de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{D}$.

c) Dados dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, mostre que existe um biholomorfismo φ tal que $\varphi(z_1) = 0$ e $\varphi(z_2) = s$, para algum $s \in [0, 1)$.

d) Prove que a distância hiperbólica entre 0 e $s \in [0, 1)$ é dada por

$$\mathrm{d}(0, s) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right).$$

e) Encontre uma fórmula para descrever a distância hiperbólica entre quaisquer dois pontos em $\mathbb{D}$.