Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Análise Complexa - Verão/25

Prova 1 - 27/01/2025 - Valor: 10 pts.

Instruções. A prova é individual. As respostas devem ser manuscritas em letra legível. Respostas sem justificativas serão desconsideradas. As justificativas devem ser completas, escritas de maneira clara, organizada e baseadas apenas nos resultados apresentados até a última aula.

Questões

1. **(3 pts)** Calcule as seguinte integrais complexas:

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z}\,dz$, onde $\gamma(t) = e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$;

   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,dz$, onde $\gamma(t) = re^{it}$, com $0 < r < 2$ (fixado) e $t \in [0, 2\pi]$.

   c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,dz$, onde $\gamma(t) = re^{it}$, com $r > 2$ (fixado) e $t \in [0, 2\pi]$.

2. **(2 pt)** Prove a seguinte versão do Teorema de Morera. Seja $\mathbb{D} \equiv \{z \in \mathbb{Z} : |z| < 1\}$ o um disco unitário aberto e $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Mostre que se para todo triângulo $T \subseteq \mathbb{D}$ temos
$$\int_T f(z)\,dz = 0$$
então $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ é holomorfa.

3. **(2 pt)** Sejam $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções inteiras. Suponha que $|f(z)| \leqslant |g(z)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $f = cg$.
(Dica: olhe para f/g e classifique as possíveis singularidades deste quociente.)

4. **(1 pt)** Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ uma região (aberto e conexo), $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções holomorfas definidas em U que converge uniformemente nas partes compactas para f, isto é,
$$f_n \xrightarrow[\substack{\text{unif.}\\ \text{compact}}]{n\to\infty} f$$
Mostre que se, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n não se anula em U, então temos uma das seguintes alternativas: f é identicamente nula ou f não se anula em U.

5. **(2pts)** Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ e as semi-retas $L_1 \equiv \{it \in \mathbb{C} : t \geqslant 1\}$ e $L_2 \equiv \{-it \in \mathbb{C} : t \geqslant 1\}$. Faça um esboço do conjunto $\Omega \equiv \mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$ e argumente com base neste esboço e nos demais resultados teóricos conhecidos que existe um ramo do logaritmo de f em Ω. Em seguida, usando continuação analítica, mostre que a função $g : \Omega \to \mathbb{C}$, dada por $g(z) \equiv \frac{1}{2i}\log_\Omega f(z)$ pode ser vista como um ramo da função $\arctan(z)$, isto é, $\tan(g(z)) = z$, para todo $z \in \Omega$.