Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Análise Complexa - Verão/25

Prova 2 - 14/02/2025 - Valor: 10 pts.

Instruções. A prova é individual. As respostas devem ser manuscritas em letra legível. Respostas sem justificativas serão desconsideradas. As justificativas devem ser completas, escritas de maneira clara, organizada e baseadas apenas nos resultados apresentados até a última aula.

Questões

1. **(3 pts)** Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo tal que $U \neq \emptyset$ e $U \neq \mathbb{C}$. Seja $f : U \to U$ um biholomorfismo. Se existem $z_1, z_2 \in U$ distintos tais que $f(z_1) = z_1$ e $f(z_2) = z_2$, mostre que $f(z) = z$, para todo $z \in U$.

2. **(4 pts)** Seja $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ a função zeta de Riemann.

   a) Argumente que a aplicação $s \longmapsto \ln(\zeta(s))$, definida em $(1, +\infty) \subset \mathbb{R}$, admite uma continuação analítica à $\Omega \equiv \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

   b) Denote por log o ramo principal do logaritmo. Mostre que se $|z| < \frac{1}{2}$, então
   $$\left| \log\left(\frac{1}{1-z}\right) \right| \leqslant 2|z|.$$

   c) seja $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência dos números primos, listados em ordem crescente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ por
   $$f_n(s) = \log\left(\frac{1}{1-p_n^{-s}}\right).$$
   Prove que a expressão $f(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ define uma função holomorfa em Ω.

   d) Seja $(\log_\Omega \zeta) : \Omega \to \mathbb{C}$ a continuação analítica obtida no item a). Mostre que
   $$(\log_\Omega \zeta)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{1-p_n^{-s}}\right).$$

   e) mostre que para todo $s \in \Omega$ temos
   $$|(\log_\Omega \zeta)(s)| \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{p_n^s}\right| \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}.$$

   f) Mostre que $\ln|\zeta(s)| \leqslant |(\log_\Omega \zeta)(s)|$ em seguida, usando os itens anteriores, mostre que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.$$

3. **(3 pts)** Mostre que a equação $e^z - z = 0$ possui infinitas soluções.