Teoria dos Números (Turma B)

Diego Marques

Lista 1

Problema 1. *Mostrar por indução, que*

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(2) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
(3) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
(4) $n! > 2^n, \ \forall n \geq 4$
(5) $n^2 > 2n + 1, \ \forall n \geq 3$
(6) $9 \mid (10^{n+1} - 9n - 10), \ \forall n \geq 1$

Problema 2. *Provar que o produto de* 3 *inteiros consecutivos é divisível por* 6*.*

Problema 3. *Provar que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *é um múltiplo de* 7 *e que* $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ *é um múltiplo de* 11*.*

Problema 4. *Mostrar que se* a *e* b *são inteiros positivos com* $(a, b) = [a, b]$*, então* $a = b$*.*

Problema 5. *Mostrar que a equação* $x^3 + 7x + 17 = 0$ *não possui nenhuma solução inteira.*

Problema 6. *Mostrar que para nenhum* $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 1$ *é um cubo.*

Problema 7. *Pode o número* $A = 111\ldots1$*, formado por trezentos 1's, ser um quadrado?*

Problema 8. *Sejam* $F_1 = 1, \ F_2 = 1$ *e* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ n \geq 3$ *(*F_n *é chamado o* n*-ésimo número de Fibonacci). Mostrar que*

(1) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
(2) $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
(3) $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
(4) $F_1F_2 + F_2F_3 + +F_3F_4 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} = {F_{2n+1}}^2 - 1$

Problema 9. *Mostrar que além de* $2 = 1^3 + 1$*, nenhum número da forma* $n^3 + 1$ *é primo.*

Problema 10. *Utilizando a sequência* $R_n = n! + 1, \ n \geq 1$*, fornecer uma outra demonstração para a infinitude dos primos.*

Problema 11. *Mostrar que todo inteiro maior do que* 11 *é a soma de dois inteiros compostos.*

Problema 12. *Mostrar que* 3 *é o único primo* p *tal que* p, $p+2$ *e* $p+4$ *são todos primos.*

Problema 13. *Achar a soma de todos os números formados pelas permutações dos dígitos* 1, 2, 3, 4 *e* 5, *isto é:* $12345 + \cdots + 54321$.

Problema 14. *Provar que não existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $7 \mid (4n^2 - 3)$.

Problema 15. *Mostrar que se para algum* n, $m \mid (35n+26)$, $m \mid (7n+3)$ *e* $m > 1$, *então* $m = 11$.

Problema 16. *Mostrar que se* $(a, b) = 1$, *então* $(2a + b, a + 2b) = 1$ *ou* 3.

Problema 17. *Mostrar que sendo* n *um inteiro, o número* $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ *é um quadrado perfeito.*

Problema 18. *Determinar todos os números de* 3 *algarismos divisíveis por* $8, 11$ *e* 12.

Problema 19. *Encontrar todos os inteiros positivos* n *para os quais* $(n+1) \mid (n^2+1)$.

Problema 20. *Mostrar que se* $(a, c) = 1$ *então* $(a, bc) = (a, b)$.