Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

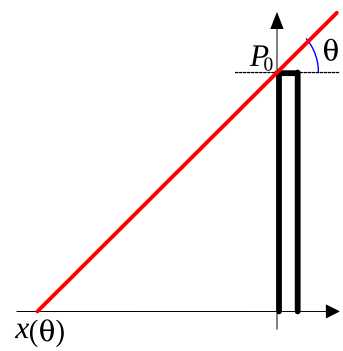
Cálculo I

Prova 1 - 2.º/2002 - 18/11/2002

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1 a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a 0.5 ou a −0.5, segundo a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco terão valor igual a zero.

1) No sistema de eixos mostrado na figura ao lado, suponha que $P_0 = (0, 20)$ representa a quina de um edifício de 20 m e que θ representa o ângulo que os raios solares fazem com a horizontal. Para $\theta \in (0, \pi/2)$, indique por L_θ a reta de coeficiente angular $\text{tg}(\theta)$ que passa por P_0. Indique ainda por $x = x(\theta)$ o ponto em que a reta L_θ intercepta o eixo $\mathcal{O}x$.



| C | E | a) A reta L_θ tem equação $y = \text{tg}(\theta)(x - 20)$.

| C | E | b) $\left|x(\pi/4)\right| = 20$.

| C | E | c) O valor de $x(\theta)$ é dado por $x(\theta) = -\dfrac{20}{\text{tg}(\theta)}$.

| C | E | d) Se $\text{tg}(\theta) = \sqrt{3}/3$, então o ponto $P = (-5\sqrt{3}, 10)$ está em uma região ensolarada.

| C | E | e) O ponto $Q = (-20, 10)$ está em uma região ensolarada apenas para os ângulos θ tais que $\text{tg}(\theta) > 1/2$.

2) Considere que um mol de um gás esteja contido em um recipiente de volume fixo $V = 20$ litros e sujeito a uma pressão de P torr e a uma temperatura de T Kelvin. Suponha que o gás obedeça à lei de *Boyle*, isto é, que $P = P(T) = \dfrac{62,4}{V}T$, mas que a medida de T esteja sujeita a pequenos erros.

a) Determine a temperatura ideal T_0 K para que o gás esteja à pressão ideal de $P_0 = 936$ torr.

Resposta:

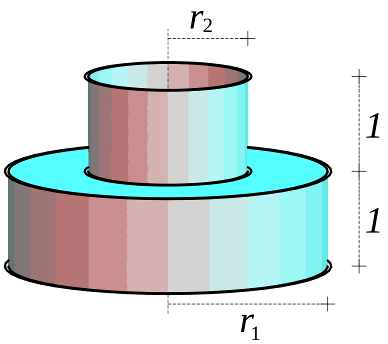
b) Calcule o erro máximo que pode ocorrer na determinação de $P(T)$ em razão de um erro máximo de 2 K na temperatura.

Resposta:

c) Determine uma margem de erro não nula na temperatura T de forma que o correspondente erro na pressão $P(T)$ seja menor ou igual a 4 torr.

Resposta:

3) A figura abaixo ilustra um recipiente formado por dois cilindros circulares retos justapostos de raios $r_1 = 4/\sqrt{\pi}$ dm e $r_2 = 2/\sqrt{\pi}$ dm. Suponha que, a partir do instante $t_0 = 0$, se comece a colocar água nesse recipiente a uma taxa de 1 dm^3 por minuto. Nessa situação, e com as medidas indicadas na figura, o nível da água $h = h(t)$ no recipiente, em decímetros, é dado por



$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{16}, & \textit{para } 0 \leqslant t \leqslant 16 \\ \dfrac{t}{4} - 3, & \textit{para } 16 < t \leqslant 20. \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico da função $h(t)$.

b) Determine, caso existam, os instantes $t \in (0, 20)$ nos quais $h(t)$ não é derivável.

c) Esboce o gráfico da função $v(t)$, em que $v(t) = h'(t)$ é a velocidade com que aumenta o nível da água no recipiente.

d) Decida se existe algum instante t_1 no intervalo $(0, 20)$ no qual $v(t_1) = 1/14$.

4) Um supermercado precisa encomendar 1.200 caixas de um determinado produto para atender as vendas do próximo ano. Cada encomenda tem um custo fixo de R\$ 75,00 e, se as encomendas forem de x caixas cada, o custo anual de armazenagem é igual a $4\,x$. Além disso, como devem ser feitas n encomendas, em que $n = 1.200/x$, segue que o custo total $C(x)$ das encomendas é dado por

$$C(x) = 4\,x + 75\,n = 4\,x + 75 \times \frac{1.200}{x} = 4\,x + \frac{90.000}{x}.$$

Pode-se mostrar que o número x_0 que minimiza o custo $C(x)$ é aquele para o qual a derivada $C'(x)$ se anula.

a) Com base nos valores de $C(1)$, $C(100)$ e $C(1.200)$, justifique a afirmação de que o ponto x_0 que minimiza o custo é tal que $1 < x_0 < 1.200$.

b) Use a definição para calcular, separadamente, as derivadas das funções $f(x) = 4\,x$ e $g(x) = 90.000/x$.

c) Use o item anterior para calcular a derivada $C'(x)$.

d) Usando as informações anteriores, determine o valor de x_0.