Regimes de concorrência imperfeita: o regime de Cournot e o equilíbrio de Cournot-Nash

Guilherme Pereira de Freitas *
Universidade de Brasília

16 de Maio de 2003

Apresentação e agradecimentos

Este texto tem sua origem no desejo de enriquecer as atividades de um primeiro curso de cálculo; em particular, deseja-se fornecer mais exemplos de como o instrumental de cálculo pode ser aplicado em problemas econômicos. Tradicionalmente, cursos de cálculo encontram sua órbita natural em torno de motivações oriundas da física, até pelo desenvolvimento histórico da matéria. No entanto, para o aluno de economia, esse fato pode ser por vezes frustrante. Freqüentemente ouve-se queixas dos alunos de economia sobre a abordagem "excessivamente física" que se dá aos cursos de cálculo. De fato, existe uma carência de exemplos e ilustrações de problemas econômicos nos cursos de cálculo tradicionais. Foi justamente para ajudar a suprir essa carência que este texto foi escrito.

Optei por um exemplo um pouco mais sofisticado que o usual, com alguma teoria econômica embutida e extensa interpretação dos resultados. Os exemplos mais comuns abordados em cursos introdutórios de cálculo são os de maximização de funções de lucro ou de minimização de funções de custo, sem maiores detalhes. Apesar de terem sua importância como aplicações da teoria, estes exemplos não tocam em muitos pontos importantes (como as hipóteses subjacentes ao modelo) devido à falta de tempo com que os professores se deparam em sala de aula. Com o trabalho aqui desenvolvido, espera-se disponibilizar um material que contenha uma aplicação mais rica e detalhada que motive em especial o aluno dos primeiros semestres do curso

*Na presente data, aluno de graduação cursando o sexto semestre do curso de Ciências Econômicas no Departamento de Economia da Universidade de Brasília.

de ciências econômicas, despertando-lhe a curiosidade e o gosto pela modelagem formal. Este texto me parece uma boa oportunidade para que o aluno que está no início de um curso de economia entre em contato logo cedo e de uma forma didática com um tipo de modelagem que será muito comum ao longo do seu curso. Para alunos de graduação mais avançados, pode ser a oportunidade de revisar ou tocar de maneira mais cuidadosa em conceitos vistos rapidamentes em outras disciplinas [1].

Ainda que o texto pareça um pouco "longo", é de leitura rápida, visto que não é denso; isso vale especialmente para o aluno que já teve contato com o assunto antes. Ao longo do trabalho há uma série de notas de rodapé que podem acabar atrapalhando a leitura do texto principal. Essas notas apresentam comentários interessantes, mas não essenciais ao compreensão do assunto abordado; por isso, o leitor pode se sentir livre para passar por elas sem lhes dar muita atenção. Para o aluno que esteja já familiarizado com os temas aqui tratados, não é necessário que ele leia o trabalho do início ao fim; basta se familiarizar com a notação e ir pontualmente na seção de interesse, voltando eventualmente em alguma parte anterior do texto, precisamente orientado pelas várias referências cruzadas.

Gostaria de agradecer à minha família, aos professores [2] e colegas da Universidade de Brasília. A todos, agradeço pela contribuição na minha formação como profissional e como pessoa. Quero também agradecer a todos que ajudaram e/ou ajudam a desenvolver softwares como LaTeX e TeX[3]; é um benefício imenso para toda a comunidade acadêmica ter softwares de tão alta qualidade em domínio público [4]. Gostaria ainda de ressaltar que todo e qualquer erro contido nas próximas páginas é de responsabilidade exclusiva minha.

Guilherme Pereira de Freitas
Brasília, abril de 2003

---

[1] Tipicamente, cursos de microeconomia ou de economia/organização industrial. Este texto pode muito bem ser um texto complementar para essas matérias.

[2] Em especial, ao professor Célius Magalhães, cujo apoio foi fundamental para o desenvolvimento deste texto, e ao professor Maurício Bugarin, pelas valiosas sugestões.

[3] Este texto foi feito por meio do LaTeX 2_ε. A distribuição utilizada foi o MikTeX, com a interface do TeXnic Center, todos de domínio público ou *freeware*.

[4] A propósito, fica aqui uma recomendação do autor deste texto que os alunos que desejem escrever documentos científicos de alta qualidade tipográfica aprendam a utilizar o LaTeX. É um software livre, de domínio público, com amplo suporte internacional — há uma série de documentos e listas de discussões disponíveis na internet para os usuários tirarem suas dúvidas — e padrão para redação de textos científicos nos melhores centros de pesquisa do mundo. O LaTeX pode ser encontrado na internet sob várias distribuições. Uma delas é o MikTeX (também software livre). Mais informações no site www.miktex.org.

1 Introdução

Este texto se propõe a fazer uma breve ilustração de um conhecido modelo de concorrência imperfeita: *o regime de concorrência de Cournot* [5]. Além disso, estudaremos o seu resultado mais importante: a solução de equilíbrio encontrada por Cournot, mais tarde chamada de *o equilíbrio de Cournot-Nash* [6]. Esse assunto pode ser estudado em bons cursos ou em livros de microeconomia [7], economia/organização industrial e teoria dos jogos. Alguns desses livros estão devidamente inclusos nas referências bibliográficas, ao fim do texto, na página 39. A abordagem será feita ressaltando o arcabouço matemático (em especial o de cálculo diferencial) e teórico utilizado e de forma a tornar o entendimento possível mesmo àquele aluno que nunca teve contato com teoria econômica alguma; basta que o aluno tenha um pouco de boa vontade e saiba conceitos básicos de cálculo em uma variável.

As próximas seções serão apresentadas na seguinte ordem:

- Hipóteses gerais e notação.
- O caso de concorrência perfeita.
- Concorrência imperfeita: a modelagem do Duopólio de Cournot.
- O equilíbrio de Cournot-Nash para duas firmas.
- O caso de n firmas.
- Comentários finais.

Primeiramente, na seção 2, estabeleceremos as hipóteses gerais do nosso estudo; essas hipóteses são comuns a todos os modelos que vamos desenvolver. Além disso vamos detalhar a notação a ser utilizada ao longo de todo o texto. Em seguida, na seção 3 vamos expor alguns pontos sobre modelos de concorrência perfeita; ao final dessa seção também faremos alguns comentários sobre a base em que se assenta grande parte dos estudos e modelos de concorrência imperfeita modernos: a *teoria dos jogos*. Há que se lembrar, contudo, que a teoria dos jogos por si só não foi responsável pela criação de

[5] Baseado no tratado *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* de 1838 escrito por Antoine Augustin Cournot, 1801-1877.

[6] Em meados do séc. XX, com o desenvolvimento da teoria dos jogos, tornou-se possível caracterizar o Duopólio de Cournot como um jogo. Além disso, mostrou-se que a solução de equilíbrio encontrada por Cournot era o *Equilíbrio de Nash* desse jogo. Isso será comentado mais à frente, na seção 5

[7] Referências básicas em português são Varian (2000) e Kupfer e Hasenclever (2002).

um novo modelo; modelos de concorrência imperfeita existem desde o século XIX, quando em 1838 Cournot publicou o seu *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, um dos primeiros tratados em economia matemática de que se tem notícia. Trabalho que, por sinal, influenciou muitos dos protagonistas da *Revolução Marginalista* (1871-1874) [8] . De verdade, é dentro da teoria neoclássica (dentre várias outras correntes de pensamento econômico) que o instrumental analítico de teoria dos jogos se encaixa de maneira mais adequada.

Em seqüência, na seção 4, apresentaremos o modelo de concorrência imperfeita conhecido como *Duopólio de Cournot*, um modelo de concorrência imperfeita em que temos apenas duas firmas em um dado mercado. Extrairemos e apresentaremos os seus principais resultados. Logo depois, na seção 5, analisaremos alguns resultados desse modelo de duopólio sob a luz da teoria dos jogos, além de apresentarmos uma solução gráfica. A ênfase dessa seção é encontrar e analisar as características da solução determinística encontrada previamente por Cournot e caracterizá-la como o *equilíbrio de Nash* do jogo *Duopólio de Cournot*. Isso será feito para justificar o nome que essa solução leva na literatura: o *equilíbrio de Cournot-Nash*.

Na seção 6, estenderemos os resultados das duas seções anteriores para o caso de um mercado com n firmas. Ao final dessa seção, será traçado um paralelo com alguns resultados anteriormente obtidos. Notadamente, comentaremos os casos particulares em que $n = 1$ e $n \to \infty$; ou seja [9], em que há apenas uma firma ou em que há um número de firmas "suficientemente" grande.

Na seção 7, página 33, faremos alguns comentários finais. Será a hora de reavaliarmos as hipóteses do modelo e suas limitações. Assim, poderemos

[8]Para os alunos que não tiveram ainda contato com história do pensamento econômico, os marginalistas — notadamente (viés do autor) Léon Walras, William Stanley Jevons, Joseph Bertrand, Francis Ysidro Edgeworth e Alfred Marshall — formaram a primeira escola de pensamento econômico que tentou abordar a teoria econômica como uma ciência exata (se ou quando isso é conveniente é um assunto que foge ao escopo deste trabalho; vamos supor que, tomando-se os devidos cuidados, é um procedimento adequado). Para isso, introduziram uma nova teoria do valor que substiuiria a teoria clássica — em especial as teorias de Adam Smith, Karl Marx e David Ricardo — e que por isso ficou conhecida também como escola *neoclássica*. Grosso modo, os marginalistas diziam que o valor de um bem era dado pela *utilidade marginal* (no sentido de satisfação do consumo de uma unidade a mais do bem em questão) desse bem; daí o nome *marginalistas*. Por ser um predecessor dessa escola, Cournot às vezes é chamado de *proto-marginalista*. Cabe notar que as preocupações em manter uma linha cronológica ou histórica da teoria econômica, neste texto, terminam aqui; esse não é o foco do trabalho. Apenas mais alguns comentários serão adicionados, a título de curiosidade. Para maiores detalhes sobre a vida de Augustin Cournot, ver http://cepa.newschool.edu/het/profiles/cournot.htm.

[9]Você já desconfia do que esses casos particulares tratam?

comentar algo sobre outros modelos de concorrência imperfeita (em particular, os modelos de Stackelberg e de Bertrand) bem como citar outros marcos teóricos (em especial as contribuições da chamada *economia da informação*) que lidam com algumas limitações desse modelo. Poderemos também fazer uma breve avaliação do instrumental matemático utilizado (fundamentalmente, cálculo em um variável).

2 Hipóteses gerais e notação

Para estudar o fenômeno que desejamos (comportamento de preços e quantidades produzidas em diferentes regimes de concorrência), precisamos descrever em linhas gerais o ambiente que desejamos analisar. Isso será feito determinando-se uma *curva de demanda* associada a esse mercado; é ela que irá nos fornecer o comportamento dos consumidores (ou seja, a quantidade que eles demandam) em relação a um certo preço praticado pelas firmas. Pelo lado das firmas há que se determinar a *tecnologia* de produção (que determinará a estrutura dos *custos*). Junto com a informação da curva de demanda, será possível então determinar a *função lucro* das firmas. A partir daí, devemos supor que as firmas adotam um certo *padrão de comportamento* que possa ser modelado analiticamente.

Isso tudo equivale a determinarmos as *hipóteses gerais* dos nossos modelos. Uma vez adotadas essas hipóteses, poderemos, com a adição de algumas hipóteses particulares, construir os nossos modelos e extrair alguns resultados que esperamos ser relevantes. Esses resultados serão extraídos utilizando-nos de técnicas conhecidas de cálculo diferencial em uma variável. Ao longo de todo este texto, vamos supor então que:

i. Existem vários agentes que participam de um mercado (notadamente, consumidores e firmas) que são, em seu conjunto, chamados de *agentes econômicos*. De uma forma mais precisa, definimos um agente econômico como uma pessoa ou organização que é capaz de *fazer escolhas* numa situação de decisões econômicas. Adotamos para esses agentes a hipótese de *não saciedade*; ou seja, os agentes econômicos sempre desejarão consumir uma quantidade maior de qualquer bem econômico, independentemente da quantidade consumida no momento. Daí temos que os consumidores sempre desejarão consumir mais bens e que as firmas sempre desejarão mais lucros.

ii. A demanda desse mercado é dada por uma função $Q(P)$ de classe C^2 — o que quer dizer que é uma função *continuamente derivável duas vezes*[10]

[10] Mais explicitamente, uma função é dita de classe C^n em um intervalo I se as derivadas

— em que Q, a quantidade demandada do bem em questão, é função do preço P desse bem. Por exemplo, a um certo nível P_0, digamos que $Q(P_0) = Q_0$. Ou seja: a um dado preço P_0, os consumidores demandaram uma quantidade Q_0, dada por $Q(P_0)$.

iii. A *curva de demanda* [11] é *negativamente inclinada*. Analiticamente, isso significa que $\frac{dQ}{dP} < 0$. Se interpretarmos essa expressão, veremos que para uma variação positiva em P, temos uma variação negativa em Q; ou seja, à medida que o preço desse bem aumenta, as pessoas tendem a comprar menos desse bem [12].

iv. Expressaremos a demanda desse mercado particular como uma função *linear* [13] do preço na forma:

$$Q(P) = h - kP \qquad h, k > 0 \tag{1}$$

em que os parâmetros h e k descrevem as características desse mercado. Repare que k mede a sensibilidade da quantidade demandada Q em relação a variações no preço P [14]; quanto maior k, para uma dada variação no preço praticado pelas firmas, menor será a quantidade demandada pelos consumidores. O parâmetro h carece de muita significação econômica; basta dizer que ele ajuda a descrever esse mercado particular.

v. Sendo a demanda uma função linear do preço, podemos dizer que a *curva de demanda inversa*, $P(Q)$, também é uma função linear [15]. Expressaremos a curva de demanda inversa como

$$P(Q) = a - bQ \qquad a, b > 0 \tag{2}$$

de ordem até n existem e são contínuas nesse intervalo (que no nosso caso é o domínio da função). Obviamente, se uma função é de classe C^n, ela também é de classe C^{n-1}. Assim, se a função $Q(P)$ é de classe C^2, $Q(P)$,$Q^{'}(P)$, $Q^{''}(P)$ são contínuas. Isso será importante para garantir a existência das derivadas em problemas mais à frente.

[11] Tradicionalmente, os economistas plotam o gráfico da demanda — a *curva de demanda* — em um espaço $Q \times P$ e não $P \times Q$ como seria de se esperar. De verdade, o que se desenha é a *curva de demanda inversa*, a ser mencionada mais à frente.

[12] Essa é uma hipótese bastante razoável para um grande número de casos; contudo não é universalmente válida.

[13] A hipótese de linearidade da curva de demanda é adotada meramente para tornar o modelo mais descomplicado. Em vários casos, é uma aproximação razoável.

[14] Note que que $k = \frac{dQ}{dP}$. Essa expressão é de grande utilidade para os economistas, pois é utilizada no cálculo da *elasticidade-preço da demanda*, $\xi = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$, que mede a variação percentual na quantidade demandada para uma dada variação percentual no preço.

[15] Facilmente demonstrável pelo teorema da função inversa para uma variável.

em que os parâmetros $a > 0$ e $b > 0$ descrevem indiretamente as características desse mercado pelas expressões $a = \frac{h}{k}$ e $b = \frac{1}{k}$. A Figura 1 apresenta o gráfico desta curva de demanda inversa[16].

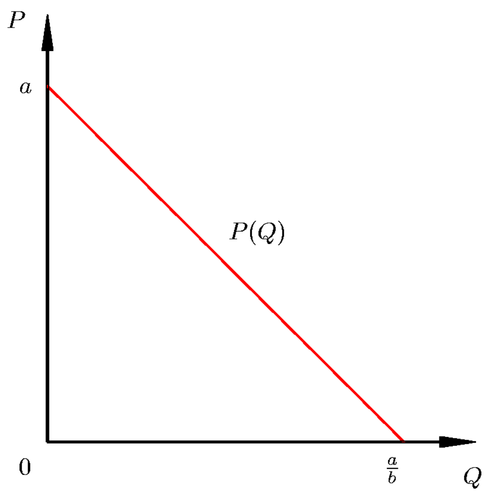

Figura 1: Curva de demanda inversa

vi. Existem n firmas que operam nesse mercado. As firmas têm a mesma tecnologia [17] de produção; assim, suas estruturas de custos são idênticas. Ademais, se dissermos que a produção de q unidades pela Firma i é dada por q_i, vamos supor que os *custos totais* para a firma i de produzir q unidades do bem em questão são dados pela seguinte função de classe C^2:

$$C_i(q_i) = F + cq_i \qquad c > 0,\ F \geqslant 0 \qquad i = 1, \cdots, n \tag{3}$$

em que c é o *custo marginal* e F é um *custo fixo* que, por sim-

[16]Em verdade, a demanda não está muito bem especificada. Quando o preço se anula, não há razão para que os consumidores demandem apenas $Q(0) = h$. De verdade, eles demandarão uma quantidade *inifinita* de bens, dada a hipótese de não saciedade. Ademais, se o preço for tal que $P > a$, a quantidade também é zero. Dessa forma, a curva de demanda deveria ser vertical no eixo y acima do ponto $P = a$ e deveria ser horizontal no eixo x à direita do ponto $Q = \frac{a}{b}$. No entanto, essas sutilezas não alterariam os resultados que encontraremos aqui; por isso, serão omitidas.

[17]A teconologia de uma firma é representada por uma *função de produção* que transforma insumos em produtos. Um exemplo comum é uma função do tipo $f(K, L) = Q$, que transforma certas quantidades de insumos capital K e trabalho L em um dada quantidade de produto Q.

plificação, assumiremos nulo [18]. Assim, se $F = 0$, a equação (3) fica

$$C_i(q_i) = cq_i \qquad c > 0, \qquad i = 1, \cdots, n \tag{4}$$

Note que os custos marginais são constantes e iguais a c. Devemos impor também uma restrição $a > c$, que, mais tarde, veremos que será necessária. De verdade, essa restrição faz muito sentido; se reparmos na curva de demanda inversa, $P(Q) = a - bQ$, veremos que a é o maior preço que um certo consumidor estaria disposto a pagar por uma unidade do bem. Ora, se c é o custo de produção de uma unidade adicional, se $a < c$, então não é interessante produzir nem a primeira unidade! Isso porque o custo de produção é mais alto que o maior preço pelo qual se poderia vender a mercadoria nesse mercado.

vii. O bem produzido por essas firmas é chamado um bem *homogêneo*. Isso significa que os consumidores não distingüem entre bens produzidos por uma firma ou outra; a procedência do bem é irrelevante para a maneira como os consumidores percebem o bem. Se os bens não fossem homogêneos, um consumidor qualquer poderia ter várias curvas de demanda para o bem que focamos se ele fosse originário de firmas diferentes; ou seja, cada consumidor poderia ter várias curvas de demanda desse bem (a depender da firma que o produz). Não poderíamos, portanto, agregar todos os consumidores em uma mesma curva de demanda. Essa também é uma hipótese que visa simplificar o problema de forma a manter o foco nas variáveis que desejamos estudar: lucros, preço e quantidade produzidas sob diferentes regimes de concorrência.

viii. Dizemos que os modelos são de *informação perfeita* e *completa*, e que não há *custos de transação* [19]. A hipótese de informação perfeita garante que cada agente observa todos os eventos ocorridos no mercado; mais especificamente, não há eventos aleatórios e cada agente observa a ação de todos os outros agentes (não há incertezas). A hipótese de informação completa garante que cada agente esteja informado sobre as características, objetivos e/ou preferências dos outros agentes. Se essas hipóteses valem para cada agente, pode-se dizer que além de perfeita e

[18] A hipótese de custos fixos nulos simplifica um pouco a análise de concorrência perfeita. Haverá uma nota mais a frente sobre esse ponto.

[19] Custos de transação são os custos que os agentes incorrem por recorrer ao mercado. São os custos de desenhar e fazer cumprir contratos. Ao contrário do que pode parecer a uma primeira vista, são custos bastante significativos! No entanto, não entraremos em maiores detalhes sobre esse tópico neste texto.

completa, a informação é *simetricamente distribuída* [20]. A ausência de custos de transação garante que os ajustamentos de mercado podem ser feitos sem custos de qualquer tipo para as firmas. Isso equivale a dizer que os únicos custos significativos para a firma são os custos de produção. Essas hipóteses, junto com a hipótese de homogeneidade do bem em questão nos leva à *lei do preço único* : o bem é comercializado a um *único* e dado preço, não importa quem seja o produtor ou o consumidor. Decorrente dessas hipóteses também pode-se inferir que a firma irá vender *toda a sua produção*; se ela tem informação completa e perfeita sobre o mercado (se ela conhece a curva de demanda), então ela se ajustará perfeitamente, de forma que a oferta iguale a demanda.

ix. Dizemos que os agentes econômicos (firmas e consumidores nesse caso) são *racionais* [21]; isso significa, grosso modo, que um agente faz sempre o que ele julga melhor para si [22]; na prática, isso significa que o agente é um *agente otimizador* . Nesse sentido, assumiremos que firmas devem escolher um nível de produção de forma a *maximizar* seus lucros enquanto os consumidores devem escolher o quê e quanto consumir de forma a *maximizar* a sua satisfação. Assim, se pudermos obter expressões matemáticas na forma de funções para lucros das firmas e satisfação dos consumidores, poderemos obter o nível *ótimo* de produção e de consumo maximizando ambas as funções. Neste texto, será necessário apenas determinar uma função lucro; o comportamento dos consumidores será abordado de forma mais indireta (será *dado* pela curva de demanda) e não é o foco deste trabalho. Ademais, vamos supor que os agentes econômicos têm capacidade de raciocínio lógico *ilimitada*; isso os permitirá efetuar cálculos complicados e conhecer seus resultados [23].

[20]Trataremos em detalhe no final do texto sobre essa hipótese. No entanto, não haverá uma discussão maior sobre a ausência de custos de transação. Isso acontece não porque não seja um assunto importante; é bastante relevante, de fato. Contudo, a discussão sobre problemas de assimetria de informação me parece mais interessante. Reconheço aqui o viés dado pelas minhas preferências. *Nota do autor* .

[21]O que não significa que quem não siga os padrões de comportamento aqui determinados seja irracional. A racionalidade dos agentes é um conceito estritamente teórico e bem definido.

[22]Isso não é uma hipótese egoísta como muitos podem pensar: o que cada um pensa que é melhor para si mesmo varia muito, e pode inclusive incluir o bem-estar de um outro agente econômico; nada impede que um indivíduo obtenha satisfação com o bem-estar do outro e que isso seja modelado.

[23]Essa é uma hipótese muito combatida, em especial no caso de situações muito complexas que exigiriam uma capacidade extremamente alta — ou até sobre-humana, diriam alguns — de raciocínio lógico para serem analisadas e resolvidas.

x. Definimos firma como um conjunto de indivíduos que se organizam para transformar insumos em produtos. Estaremos, porém, desconsiderando os efeitos dos conflitos de interesse entre os indivíduos que provêem os insumos e os que controlam a firma [24]. Trataremos a firma como um único bloco decisório; suas decisões podem ser o equivalente das decisões de um administrador "ditatorial", que persegue racionalmente um certo objetivo. No caso desse texto, o objetivo será a maximização dos lucros.

Passemos agora a alguns detalhes da notação que adotaremos:

i. Se a produção individual q de uma firma i é dada por q_i, a produção total Q nesse mercado é dada pela *soma* das produções de todas as firmas individuais. Assim, se tivermos n firmas, $Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Dessa forma, a curva de demanda inversa de (2) pode ser expressa na forma

$$P(Q) = a - b\sum_{i=1}^{n} q_i \tag{5}$$

Mais à frente será importante adotar essa notação mais explícita. Repare que o produto de *cada firma* influencia a determinação do preço de mercado do bem que estamos estudando.

ii. A receita total r da firma i da produção e venda de q unidades do bem é dada por:

$$r_i(q_i) = P(Q)q_i \tag{6}$$

A receita total RT da *indústria* [25] é dada por

$$RT(Q) = \sum_{i=1}^{n} r_i(q_i) = P(Q)Q \tag{7}$$

iii. Podemos agora definir os custos totais da indústria como:

$$CT(Q) = \sum_{i=1}^{n} C_i(q_i) \tag{8}$$

[24] Utilizando termos oriundos da economia da informação, não há *custos de agenciamento* ou *custos de agência* . Falaremos sobre isso no fim do texto, na seção 7.

[25] Considera-se *indústria* o conjunto de todas as firmas que produzem o bem em questão nesse mercado.

iv. Podemos então expressar a *função lucro* de uma firma i:

(9) $$\pi_i(q_i) = r_i(q_i) - C_i(q_i)$$

e o lucro da indústria:

(10) $$\Pi(Q) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(q_i) = RT(Q) - CT(Q)$$

Ambas funções lucro são também de classe C^2, o que decorre da classe C^2 das funções que compõe o lucro

Vale a pena verificar a validade das expressões acima; é um exercício fácil e válido. Essas expressões (receita, custo e lucro) serão de muita importância nesse estudo. A propósito, observaremos o comportamento de um mercado sob diferentes regimes de concorrência com base na análise das seguintes variáveis:

i. Quantidade produzida por cada firma, q_i, e quantidade produzida pela indústria, Q.

ii. Preço, $P(Q)$.

iii. Lucro de cada firma, $\pi_i(q_i)$, e lucro total da indústria, $\Pi(Q)$.

Uma vez determinada a função lucro, vamos assumir algumas hipóteses sobre ela, de forma a podermos explicitar analiticamente a hipótese de que as firmas são *maximizadoras de lucros*, comos dissemos anteriormente.

i. Assumiremos que a função lucro é *estritamente côncava* [26]. Ou seja,

(11) $$\pi_i''(q_i) < 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

ii. Sendo assim, para que uma Firma i maximize seus lucros, as condições de primeira ordem são suficientes. Basta então que:

(12) $$\pi_i'(q_i) = 0$$

[26] Precisamente, uma função $f(x)$ é *estritamente côncava* se, para todo $\alpha \in (0,1)$, dados dois pontos a e b quaisquer do domínio de f, vale a relação $f(\alpha a + (1-\alpha)b) > \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)$. Vale a pena tentar fazer um gráfico dessa expressão; fazendo isso, percebe-se que a expressão acima diz que a reta que une dois pontos $f(a)$ e $f(b)$ deve estar sempre abaixo do gráfico da função entre esses dois pontos se a função f for estritamente côncava.

o que, pela função lucro previamente definida em (9), equivale a [27]:

$$r_i^{'}(q_i) = C_i^{'}(q_i) \qquad \textbf{[C.P.O.]} \tag{13}$$

para que a Firma i maximize seus lucros. Chamamos $r_i^{'}(q_i)$ de *receita marginal* e $C_i^{'}(q_i)$ de *custo marginal* [28]. É um resultado bastante intuitivo. Note que é lucrativo para uma firma *aumentar* a produção sempre que $r_i^{'}(q_i) > C_i^{'}(q_i)$; isso porque, enquanto essa relação valer, a venda da unidade adicional trará uma receita (a receita marginal) maior que o custo para produzi-la (o custo marginal), o que dá um incremento positivo no lucro. Assim, a firma deve aumentar a produção, até que a venda de uma unidade adicional não traga lucro nenhum, $\pi_i^{'}(q_i) = 0$, até que $r_i^{'}(q_i) = C_i^{'}(q_i)$.

Lembremos que, como não faz sentido preços ou quantidades negativas, todas as funções definidas nesta seção estão definidas apenas para valores não-negativos de Q, q_i e P. Além disso, sempre que estivermos derivando alguma variável com respeito à produção de alguma firma, estamos assumindo que a produção das outras firmas *é mantida constante.* Ou seja, se desejamos computar $\frac{dQ}{dq_j}$, estamos assumindo que a produção de todas as firmas *à exceção da firma j* [29] não se altera. Dessa forma, para qualquer firma j, a produção das outras firmas é um *parâmetro.* Na prática, na hora de computar $\pi_j^{'}(q_j)$, por exemplo, podemos trtar a produção das outras firmas como constantes. Isso garante que nos mantenhamos no universo do cálculo em uma variável e que possamos tratar apenas de derivadas simples, e não derivadas parciais (que são utilizadas no caso de funções de várias variáveis).

3 O caso de concorrência perfeita

Vejamos então, primeiramente, a situação em que existe um número muito grande (ou "suficientemente grande") de firmas em um dado mercado, competindo entre si; é o caso da *concorrência perfeita.*

[27]Na literatura, **C.P.O.** significa *Condições de Primeira Ordem* . As condições de primeira ordem, dada a hipótese de concavidade da função lucro, serão suficientes para garantir que qualquer ponto crítico encontrado seja um ponto de lucro máximo.

[28]A *receita marginal* da venda de um bem é a receita adicional pela venda de uma unidade a mais do bem, por isso expressa pela derivada $r_i^{'}(q_i)$.O *custo marginal* é o custo de produzir uma unidade adicional, dado um certo nível de produção. Ou seja, é a variação nos custos dada por uma variação muito pequena na quantidade produzida, sendo, portanto, dado por $\frac{dC}{dq_i}$ ou $C_i^{'}(q_i)$. Na literatura, é comum chamar o custo marginal de CMg e a receita marginal de RMg; assim, a condição de primeira ordem em (13) pode ser expressa como $RMg = CMg$.

[29]Na literatura, costuma-se usa a notação q_{-j} para a produção de todas as firmas *à exceção* da firma j.

As hipóteses adicionais para um modelo [30] de concorrência perfeita são:

i. Os mercados são perfeitamente permeáveis. Isso quer dizer que tanto a entrada nessa indústria, quanto a saída dela podem ser feitas por qualquer indivíduo/firma sem o ônus de nenhum custo especial. Diz-se que são mercados de *livre entrada* e *livre saída*.

ii. Existe um grande número de consumidores, que são *tomadores de preços*; eles tomam o preço de mercado como dado para fazer suas escolhas de modo a maximizar a sua satisfação.

iii. Existe um grande número de firmas que produzem, individualmente, uma parcela "muito pequena" do produto total da indústria. Esse fenômeno é tal que as firmas não têm como influenciar o preço de mercado (que depende do produto da indústria) $P(Q)$ via uma variação na quantidade produzida; sendo assim, elas também são tomadoras de preços. Assumimos também que nenhuma das firmas tendo *poder de mercado* [31] individualmente, elas também não têm incentivo para formar coalizões, visto que mesmo estas contribuiriam com uma parte ínfima da produção total.

A hipótese (i), junto com a hipótese de racionalidade dos agentes econômicos tem uma implicação muito importante: no longo prazo, firmas irão entrar nessa indústria enquanto houver lucros positivos para as firma dessa indústria. Esse processo se dará até que não haja mais oportunidade de lucro para a firma, ou seja, até que o lucro das firma (e da indústria, por conseqüência) seja nulo [32].

A hipótese (ii) garante que os consumidores não têm nenhum poder de barganha, e que não vão se comportar estrategicamente de forma a tentar induzir uma alteração no preço de mercado em favor deles.

A hipótese (iii) implica, imediatamente, que para uma Firma i qualquer, o efeito de variações na quantidade produzida q_i sobre o preço P do produto

[30] Há que se notar que o modelo que estamos descrevendo é um modelo de equilíbrio *parcial* de mercado; estamos analisando apenas um mercado de um determinado bem. Em contraste, existem os modelos de *equilíbrio geral* que estudam a interação de uma série de mercados conjuntos.

[31] Entenda como poder de influenciar o preço de mercado via variações na produção.

[32] Note que estamos falando de lucro no sentido que os economistas falam. O lucro, no sentido corriqueiro da palavra, ainda existe; pode-se mostrar que, num caso ideal, cada fator de produção recebe como remuneração o seu produto marginal. Apenas queremos dizer que não existe nenhum tipo de lucro *extra*, ou melhor dizendo, que não há nessa indústria possibilidades de lucro maiores que em outros mercados; isso significa que não há incentivos para que mais firmas entrem nessa indústria.

é nulo. De fato, a expressão $\frac{dP}{dq_i} = 0$ é que nos indica que as firmas são tomadoras de preços. Ademais, vamos supor que as firmas não conseguem ganhar poder de mercado ao formar coalizões. O resultado prático de tudo disso é que as firmas percebem que o seu nível de produção, q_i, não influencia a determinação do preço final, P, o que decorre de $\frac{dP}{dq_i} = 0$. Sendo assim, o preço P entra como um parâmetro adicional nas funções de receita e lucro *de cada firma individual*, de sorte que $r_i(q_i) = Pq_i$. Expressando a nova função lucro, temos:

$$\pi_i(q_i) = Pq_i - C_i(q_i) \tag{14}$$

Obviamente, o custo total de cada firma não se altera, visto que não depende do preço de mercado do bem. Devemos agora então buscar uma expressão particular para a condição (13). Para isso, reparemos que $r_i^{'}(q_i) = P$. Sendo assim, a condição *suficiente* (dada a hipótese de concavidade da função lucro) para que uma Firma i maximize seus lucros é que ela adote

$$P = C_i^{'}(q_i^*) \quad \textbf{[C.P.O. — Concorrência Perfeita]} \tag{15}$$

para um certo nível de produção q_i^*, chamado *nível de produção ótimo*[33] ou *de equilíbrio* . Na literatura, a expressão (15) costuma ser expressa como $P = CMg$; ou seja, uma firma maximiza lucros quando ela produz uma quantidade de forma que o seu custo marginal iguale o preço corrente de mercado. Em outras palavras, dada a hipótese de concavidade estrita da função lucro, é conveniente para a firma produzir até que $P = CMg$; sempre que o preço for maior que o custo marginal e até que os dois se equalizem.

Uma maneira mais precisa de fazer as afirmações que acabamos de fazer, em especial na equação (15) é a seguinte: tomemos a expressão fundamental que caracteriza a maximização dos lucros, $r_i^{'}(q_i) = C_i^{'}(q_i)$. Explicitemos então $r_i^{'}(q_i)$, sem aquela argumentação intuitiva de que as firmas são tomadoras de preços, que o preço é um parâmetro; gostaríamos agora de verificar rigorosamente porque isso ocorre. Lembremos que:

$$r_i(q_i) = P(Q)q_i \tag{16}$$

Ora, mas por (5), $P(Q) = P(\sum_{i=1}^{n} q_i)$. Sendo assim, para calcularmos $r_i^{'}(q_i)$ devemos [34] utilizar uma regra conhecida de diferenciação de produto

[33] De agora em diante, utilizaremos o $*$ para indicar otimalidade ou equilíbrio. Ou seja, q_i^* é o nível de produção ótima, ou nível de produção de equilíbrio, da Firma i. De verdade, o conceito de *equilíbrio* não implica *otimalidade*; contudo, nos problemas aqui abordados, isso acontece de fato.

[34] Esse é o único momento em que o aluno que está acostumado com cálculo em apenas uma variável *pode* ficar um pouco perdido. Para exemplificar a validade da expressão (17), pense no caso particular de uma firma qualquer; digamos, Firma 2. Para ela, a receita total é $r_2(q_2) = P(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)q_2$. Então, $r_2'(q_2) = \frac{dP}{dq_2}q_2 + P\frac{dq_2}{dq_2}$.

de duas funções [35]:

$$r_i^{'}(q_i) = \frac{dP}{dq_i}q_i + P(Q)\frac{dq_i}{dq_i} \tag{17}$$

Podemos simplificar facilmente essa expressão; basta lembrar que, segundo as nossas hipóteses, $\frac{dP}{dq_i} = 0$ [36]. Sendo assim, o primeiro termo de equação (17) se anula; quanto ao segundo termo, obviamente $\frac{dq_i}{dq_i} = 1$. Então, temos que a expressão (17) se torna da forma como queríamos:

$$r_i^{'}(q_i) = P(Q) \tag{18}$$

Ou seja, a receita marginal é igual ao preço; a receita da venda de uma unidade a mais do bem é igual ao preço de venda. Assim, de uma maneira um pouco mais explícita, podemos ver que, para a maximização de lucros, a firma deve operar de tal forma que a receita marginal (dada pelo preço neste caso) se iguale ao custo marginal. Repare que a expressão (15) é de fato um caso particular da expressão (13).

Voltemos agora à hipótese de um mercado perfeitamente permeável. Ela nos diz que os lucros de longo prazo são nulos. Qual é a implicação disso? Bem, se tivermos uma função de lucro π como em (14), e fizermos $\pi = 0$ temos que:

$$Pq_i^* - C_i(q_i^*) = 0 \tag{19a}$$

isolando P

$$P = \frac{C_i(q_i^*)}{q_i^*} \tag{19b}$$

Ora, mas a expressão $\frac{C_i(q_i^*)}{q_i^*}$ nada mais é que a expressão do *custo médio* de produção (também chamado de CMe) a um nível de produção q_i^*! Ou seja, obtivemos desse nosso modelo que, no longo prazo, o equilíbrio perfeitamente competitivo deve satisfazer a expressão $P = CMg = CMe$. Vale lembrar que a igualdade $P = CMg$ vem da hipótese de maximização de lucro; a igualdade $P = CMe$ vem da perfeita permeabilidade do mercado (que implica lucro de longo prazo nulo).

Encontremos então as expressões de preço, quantidade produzida e lucros nesse mercado particular que nós estamos estudando. Lembremos da seção 2 as expressões para a demanda e a equação de custos dessa indústria: $P(Q) =$

[35] Para quem não se lembra: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

[36] Novamente, as firmas são tomadoras de preços.

$a - bQ$ e $C_i(q_i) = cq_i$. Assim, aplicando a condição (15), que nos diz que $P = C_i^{'}(q_i^*)$ temos:

$$P(Q^*) = C_i^{'}(q_i^*) \tag{20a}$$
$$a - bQ^* = c \tag{20b}$$

isolando Q^*

$$Q^* = \frac{a-c}{b} \tag{20c}$$

Repare que, para que haja algum nível positivo de produto, devemos ter que $a > c$; por isso, já havíamos embutido essa hipótese na seção 2 logo após a expressão (4).

Calculemos agora o lucro das firmas e da indústria. Pela C.P.O. em (15), temos que o lucro das firmas [37] é dado por:

$$\begin{aligned} \pi_i(q_i^*) &= Pq_i^* - C_i(q_i^*) \\ &= cq_i^* - cq_i^* \\ &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Obviamente, se o lucro da indústria é a soma dos lucros das firmas, teremos que o lucro da indústria é nulo também. Assim, os principais resultados desse modelo podem ser resumidos na Tabela 1:

Regime de Concorrência Perfeita	
Preço de mercado	$P^* = c$
Produto da indústria	$Q^* = \frac{a-c}{b}$
Lucro das firmas	$\pi_i(q_i^*) = 0$
Lucro da indústria	$\Pi(Q^*) = 0$

Tabela 1: Resumo dos resultados de concorrência perfeita.

[37] Na expressão (21) percebe-se porque fizemos $F = 0$. Se $F > 0$, o lucro das firmas seria *negativo*, $\pi_i(q_i) = -F$. Contudo, como os agentes são racionais, eles não vão se manter em uma atividade de lucros negativos; sairão do mercado, o que diminuirá a produção, elevando o preço e os lucros dos que permanecerem. Essa evasão se dará até que o lucro seja nulo. Novamente, se o lucro se tornar positivo, haverá entradas na indústria, aumentando a produção, diminuindo o preço e os lucros. Esse processo se dará até que o lucro se torne nulo novamente. Para evitar uma discussão desnecessária sobre esse tema e para mantermos o foco no nosso problema — comparar modelos de regime de concorrência distintos — adotamos então $F = 0$, um recurso comum na literatura.

Esse modelo é parecido com os que os alunos de economia têm contato nos primeiros semestres de um curso de graduação [38]. Repare que há *diversas* hipóteses a serem satisfeitas, e que muitas delas são muito pouco realistas. Talvez as mais gritantes sejam as hipóteses específicas de um modelo de concorrência perfeita, apresentadas nesta seção; simplesmente (reveja as hipóteses no início da seção) essas hipóteses não valem para a enorme maioria dos casos do mundo real. De verdade, somente alguns poucos mercados podem ser aproximadamente descritos como mercados perfeitamente competitivos. A maioria dos mercados não são perfeitamente permeáveis (não são de livre entrada e saída), possuem um pequeno número de firmas ou — não tão comumente — de consumidores. Ora, se há menos firmas, fica evidente que a participação proporcional de cada firma no mercado, a sua fatia, aumenta. Sendo assim, a hipótese de que variações na produção de uma firma não alteram o preço torna-se mais fraca! De verdade, numa situação dessas, a maioria das firmas tende a perceber o seu poder de mercado, e a se *comportar estrategicamente*, seja de modo *cooperativo* ou *não-cooperativo* com as outras firmas. Um exemplo de comportamento estratégico não-cooperativo poderia ser uma tentativa de inundar o mercado e/ou fazer uma guerra de preços; um exemplo de comportamento estratégico cooperativo seria a decisão de algumas firmas de uma indústria formarem uma *coalizão*, que costumamos chamar de cartel.

Sendo assim, surge a necessidade de modelos de *concorrência imperfeita*. Cournot, em 1838, já tinha desenvolvido um modelo relativamente simples de concorrência imperfeita [39] na qual a variável de escolha para o comportamento estratégico das firmas é a quantidade produzida; é o que se chama de *concorrência via quantidades*. Em 1883, Bertrand publicou uma resenha do trabalho de Cournot, onde defendeu a idéia de que as firmas competiam via escolha de preços e não quantidade produzida (falaremos disso mais à frente). Já no século XX, com o advento da teoria dos jogos, modelos de concorrência imperfeita se tornaram muito mais sofisticados, e antigos modelos puderam ser observados sob uma nova luz. Em verdade, a teoria dos jogos se ocupa precisamente de estudar o comportamento estratégico de certos agentes, seja esse comportamento cooperativo ou não! Ora, mas então, a teoria dos jogos

[38] O modelo que foi apresentado aqui é o que os alunos estão acostumados a ver em cursos de introdução a economia, só que com maior detalhe. Um modelo parecido (e bem mais detalhado) com esse é mais comum em cursos de microeconomia, onde se estuda, com detalhes, a situação de concorrência perfeita, tanto para firmas quanto para os consumidores, por vários diferentes ângulos que não foram abordados aqui.

[39] O trabalho de Cournot de 1838 foi solenemente ignorado pela comunidade acadêmica francesa. Apenas muitos anos mais tarde, já perto da morte de Cournot, com a Revolução Marginalista é que seus escritos tiveram sua importância reconhecida.

parece ser uma ferramenta poderosa [40] para estudar situações de concorrência imperfeita; de fato, é.

Na seguinte seção, seção 4, estudaremos a modelagem que Cournot fez de um duopólio, e veremos em seguida, na seção 5, que a solução encontrada por ele em 1838, mais de um século depois [41], provou ser nada mais que o que hoje chamamos de o equilíbrio de Nash do jogo Duopólio de Cournot.

4 Concorrência imperfeita: a modelagem do Duopólio de Cournot

Chegou a hora de fazermos a modelagem para o caso em que há um número menor de firmas. Abandonaremos as hipóteses da seção 3 e, assumiremos as seguintes:

i. Suporemos que existem apenas duas firmas nesse mercado; assim, temos $i = 1, 2$, o que caracterizará um caso de *duopólio*.

ii. Juntando a hipótese de racionalidade individual e simetria das informções, obtemos um conceito um pouco mais específico de racionalidade; o administrador da Firma 1 (chamarei aqui apenas de "1") sabe que o administrador da Firma 2 (chamaremos apenas de "2") é racional, e vice-versa. Ademais, 1 sabe que 2 sabe que 1 é racional, e vice-versa; 1 sabe que 2 sabe que 1 sabe que 2 é racional, e vice-versa... e por aí vai.

iii. Ambas as firmas não observam a decisão quanto ao nível de produção da outra firma. Assim, é como se tivessem que tomar *decisões simultâneas* [42] de produção.

[40] Há que se mencionar aqui as contribuições mais recentes na área de *economia da informação* para o estudo do comportamento estratégico dos agentes econômicos. A economia da informação cuida mais precisamente do comportamento estratégico ou oportunista dos agentes devido a problemas de imperfeição de informação. Infelizmente, não trataremos disso nesse texto, devido à falta de espaço; além disso, fugiria ao objetivo do texto. Para dar um exemplo, pensemos na situação de uma pessoa que recebe um salário, mas que não tem o seu trabalho/esforço verificado pelo seu chefe. A economia da informação diz que essa pessoa tem um *incentivo* para trabalhar menos que o necessário, devido ao fato de o seu chefe não ter acesso a uma informação específica: o nível de esforço desse trabalhador. Como visto, a economia da informação trata de problemas de *incentivos* gerados por problemas de informação, e, na medida do possível, como lidar com eles. Para maiores detalhes, veja Laffont e Martimort (2002)

[41] O artigo em que John Nash define o equilíbrio de Nash data de 1950.

[42] De fato, essa hipótese também vale para o caso de concorrência perfeita. O argumento

Todas essas hipóteses foram assumidas a título de simplificação, visando tornar mais simples a observação do comportamento das variáveis relevantes além de tornar mais simples a comparação entre diferentes regimes de concorrência (nesse último caso, exceto a hipótese iv).

Partamos agora para a modelagem em si. Escrevamos primeiro a expressão do lucro individual de cada firma (derivaremos essas expressões utilizando (14) e as hipóteses especificadas nessa seção). Assim,

$$\text{Firma 1:} \quad \pi_1(q_1) = P(Q)q_1 - cq_1 \tag{22a}$$

$$\text{Firma 2:} \quad \pi_2(q_2) = P(Q)q_2 - cq_2 \tag{22b}$$

Lembrando que $Q = \sum_{i=1}^{2} q_i = q_1 + q_2$ (estamos no caso em que $n = 2$), reescrevamos $P(Q)$ como $P(Q) = a - b(q_1 + q_2)$. Assim, fazendo as devidas substituições, teremos que as expressões dos lucros em (22) são:

$$\text{Firma 1:} \quad \pi_1(q_1) = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - cq_1 \tag{23a}$$

$$\text{Firma 2:} \quad \pi_2(q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - cq_2 \tag{23b}$$

Bem, dada a hipótese de concavidade das funções lucro (de fato, é fácil perceber que as funções em (23) são estritamente côncavas), para a maximização de lucros, basta então que $\frac{d\pi_i}{dq_i} = 0$. Encontremos primeiro as derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_1}{dq_1} &= [a - c - b(q_1 + q_2)] - bq_1 \\ &= (a - c - bq_2) - 2bq_1 \end{aligned} \tag{24a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_2}{dq_2} &= [a - c - b(q_1 + q_2)] - bq_2 \\ &= (a - c - bq_1) - 2bq_2 \end{aligned} \tag{24b}$$

Assim, a C.P.O. é:

$$(a - c - bq_2) - 2bq_1 = 0 \tag{25a}$$

$$(a - c - bq_1) - 2bq_2 = 0 \tag{25b}$$

Isolando a variável q_i referente a cada uma das firmas, para um certo par (q_1^*, q_2^*) devemos ter:

$$\text{Firma 1:} \quad q_1^* = \frac{a - c - bq_2}{2b} \tag{26a}$$

$$\text{Firma 2:} \quad q_2^* = \frac{a - c - bq_1}{2b} \tag{26b}$$

é que existem muitas firmas e que é impossível ou inútil observar a produção de cada uma, uma vez que todas são idênticas e produzem uma parcela ínfima da produção total.

Repare que, dessa vez cada firma leva em conta a produção da outra na hora de tomar a decisão sobre quanto produzir! Isso por si só já é uma grande diferença em relação ao caso anterior, visto na seção 3!

Com base nas nossas hipóteses (vale a pena lembrá-las, em especial a de decisões simultâneas), podemos então chegar à solução para esse caso do Duopólio de Cournot; basta resolver o sistema linear formado pelas equações (26). Resolvendo o sistema, temos os seguintes níveis de produção:

$$\text{Firma 1:} \qquad q_1^* = \frac{a-c}{3b} \tag{27a}$$

$$\text{Firma 2:} \qquad q_2^* = \frac{a-c}{3b} \tag{27b}$$

A simetria dos resultados era esperada, dada a simetria do problema (custos iguais, situações de decisão iguais, etc.). Assim, a produção total da indústria será dada pela soma da produção das duas firmas

$$Q^* = 2\left(\frac{a-c}{3b}\right) \tag{28}$$

Note que a produção diminuiu em relação ao caso de concorrência perfeita. Substituindo (28) na expressão da demanda inversa, $P(Q) = a - bQ$, temos que:

$$P^* = \frac{a+2c}{3} \tag{29}$$

Repare que o preço subiu em relação a situação anterior (lembrando que para isso, $a > c$); de verdade, é bastante natural que o preço de um mercado duopolista seja mais alto que o de um mercado de concorrência perfeita! Fazendo as substituições na função de lucro das firmas, (22), teremos:

$$\pi_1(q_1^*) = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{3}\right)^2 \tag{30a}$$

e

$$\pi_2(q_2^*) = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{3}\right)^2 \tag{30b}$$

Repare que, diferentemente da situação de concorrência perfeita, agora os lucros são *estritamente positivos*! Obviamente, o lucro da indústria será a soma dos lucros das firmas e será dado por $\Pi(Q) = \frac{2}{b}\left(\frac{a-c}{3}\right)^2$. Os resultados da solução do Duopólio de Cournot estão expressos na Tabela 2.

Duopólio de Cournot	
Preço de mercado	$P^* = \frac{a+2c}{3}$
Produto da indústria	$Q^* = \frac{2}{3}\left(\frac{a-c}{b}\right)$
Lucro das firmas	$\pi_i(q_i^*) = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{3}\right)^2$
Lucro da indústria	$\Pi(Q^*) = \frac{2}{b}\left(\frac{a-c}{3}\right)^2$

Tabela 2: Resumo dos resultados do Duopólio de Cournot.

5 O equilíbrio de Cournot-Nash para duas firmas.

Em 1949, na Universidade de Princeton, John Forbes Nash Jr. termina o seu artigo *Equillibrium Point in n-person Games*. O artigo foi publicado em 1950 pela PNAS [43] e buscava encontrar uma solução para um jogo com n participantes. A caracterização dessa solução enquanto um ponto fixo do espaço das estratégias dos jogadores não nos interessa aqui [44]; será mais interessante caracterizar o equilíbrio do Nash de uma outra maneira.

Primeiramente, façamos algumas definições rápidas. Um *jogo* [45] de n participantes pode ser descrito [46] como uma situação em que:

i. Existe um conjunto finito de n participantes chamados *jogadores*.

ii. Cada jogador possui um *conjunto de estratégias* [47]. O conjunto dado pela estratégia particular adotada por cada jogador pode ser ordenado em uma n-upla, em que cada entrada é a estratégia de um único jogador. Essa n-upla é chamada de um *perfil de estratégias*.

[43] Ver Nash (1950).

[44] Para tal caracterização, ver Nash (1950).

[45] Costuma-se chamar um jogo como o que estamos descrevendo como um *jogo na forma estratégica*. Um jogo na forma estratégica é aquele em que os jogadores tomam uma decisão única e para sempre; assume-se também que as decisões são tomadas simultaneamente, de sorte que nenhum jogador pode observar a jogada do outro ou jogar antes e esperar que os outros se adaptem. Para maiores detalhes, ver Rubinstein e Osborne (1994) ou Bugarin e Sotomayor (2002).

[46] Para uma definição mais formal, ver Rubinstein e Osborne (1994) ou Bugarin e Sotomayor (2002).

[47] Não faremos aqui a discriminação entre estratégias puras e mistas — estratégias mistas são distribuições de probabilidade sobre as estratégias puras — por motivos de simplificação. De fato, para os propósitos deste texto só serão necessárias as soluções por estratégias puras. Assim, sempre que se falar em *estratégias*, estamos supondo *estratégias puras*. Para maiores detalhes, ver Rubinstein e Osborne (1994) ou Bugarin e Sotomayor (2002).

iii. Para cada perfil de estratégias existe um *payoff* [48] associado a cada jogador; assim, temos também uma n-upla de payoffs ,ou um *perfil de payoffs*, associado a cada perfil de estratégias. Assume-se também que os jogadores possam estabelecer *relações de preferências* entre os possíveis *payoffs* de sorte que eles possam ordená-los em grau de desejabilidade [49].

A interpretação dessa definição é que um jogo como o que queremos descrever é uma situação em que os jogadores têm que tomar decisões cujas conseqüências são afetadas pelas decisões dos outros jogadores (por isso o payoff de cada jogador depende da estratégia de *todos* os jogadores e não só da estratégia do próprio jogador). Por esse motivo, os agentes têm um *incentivo* a se comportar *estrategicamente*; ou seja, se os agentes forem racionais (e essa é uma das nossas hipóteses), eles devem tomar decisões ótimas levando em conta não só as suas características individuais, mas também as expectativas que eles têm das ações dos outros jogadores. Em outras palavras, cada agente deve se comportar estrategicamente para auferir os maiores ganhos possíveis para si. Um jogo de xadrez, pôquer ou truco são bons exemplos. Contudo, o conceito de *jogo* como foi definido comporta uma gama de situações muito maior que os jogos lúdicos. Pense num modelo de biologia do tipo predador-presa; a decisão do predador afeta o resultado para a presa e vice-versa. Ele se encaixa muito bem na nossa definição, não? Pense em uma guerra, ou uma eleição, um leilão. Pense... há um número *imenso* de situações!

Bem, basta dar uma breve olhada no modelo da seção 4 para vermos que o Duopólio de Cournot pode ser caracterizado como um jogo (um jogo de caráter econômico). As duas firmas são os jogadores; cada firma deve decidir quanto produzir (sua estratégia); o lucro final (o *payoff*) da firma é afetado pela produção da outra firma. Por isso, na decisão de quanto produzir, cada firma deve levar em consideração a produção da outra firma. Ora, mas foi exatamente isso que encontramos nas expressões (26).

Agora, uma vez que temos um jogo em mãos, o que fazemos? Bem, existem vários conceitos de soluções para vários tipos de jogos diferentes...

[48] Não parece haver uma boa tradução do termo; uma tradução freqüente é *pagamento*, mas eu não acho muito adequada. Um *payoff* para um certo jogador é a conseqüência ou o resultado para esse jogador decorrente de um determinado perfil de estratégias; ou seja, o payoff para o jogador i é conseqüência para esse jogador i de ele *e cada um dos outros* jogadores terem adotado uma determinada estratégia.

[49] Esse último ponto é de suma importância; se os agentes são racionais, eles agirão otimamente; contudo, para que eles ajam otimamente, é necessário que eles *saibam* o que querem! Assumimos por exemplo, que o único objetivo de uma firma é maximizar lucros; assim, o ponto mais desejável é aquele em que o lucro é máximo.

Para jogos estratégicos, o conceito mais amplamente utilizado (mas não o único) é o *equilíbrio de Nash*. Vejamos então como a solução de Nash se encaixa no problema do Duopólio de Cournot.

Precisamos primeiro definir o que vem a ser um equilíbrio de Nash. Como já dissemos, a definição do equilíbrio em termos de um ponto fixo [50] não vai nos interessar (essa foi a definição original dada por Nash). Utilizaremos definições alternativas.

Uma maneira de definir o equilíbrio de Nash é o seguinte: um perfil de estratégias é dito um *equilíbrio de Nash* se cada jogador está adotando a melhor estratégia *dadas as estratégias de todos os outros jogadores*. Uma conseqüência (e uma maneira de checar se um certo perfil de estratégias é um equilíbrio de Nash ou não) dessa definição é que em equilíbrio, *nenhum jogador se arrepende* da estratégia adotada; se se arrependesse, é porque haveria algo melhor a fazer, *dado o que os outros fizeram*, e isso violaria a própria definição do equilíbrio; seria uma *contradição*.

Um método não necessariamente eficiente de se encontrar um equilíbrio de Nash é determinar para *cada* jogador uma função de *melhor resposta* à estratégia dos outros jogadores; teremos então um sistema de n equações. Então, se esse sistema possuir solução, poderemos encontrar os perfis de estratégia que são equilíbrios de Nash resolvendo um sistema de n equações simultâneas; afinal, a solução desse sistema deve conter a melhor resposta de cada jogador dadas [51] as estratégias de todos os outros. Se é a melhor resposta, não deve haver arrependimento. No nosso caso, esse é um método não só eficiente como também bastante conveniente [52]! De verdade, esse sistema que buscamos nada mais é que o sistema dado pelas equações (26)! Vejamos isso em maior detalhe.

Lembremos a origem das equações (26). Cada uma delas saiu da C.P.O., ou seja, da condição para maximização de lucros. Interpretando melhor essas equações, elas indicam os níveis de produção ótimos dada a produção da outra firma. Mas isso é exatamente uma função de *melhor resposta*. Ou seja, as equações (26) são justamente as funções de melhor resposta que buscamos para montar o sistema cuja solução é o equilíbrio de Nash! Na literatura,

[50] Para os curiosos, a prova da existência do Equilíbrio de Nash é usualmente feita utilizando-se o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

[51] Dizer que as estratégias das outras firmas são dadas é, para efeitos de cálculo, o mesmo que considerar a produção das outras firmas *fixas* em um certo nível arbitrário. Reforçando o que já foi dito anteriormente, isso permite que o lucro de uma firma seja função apenas da produção desta firma, o que nos mantém no universo do cálculo em uma variável.

[52] Como as estratégias q_i são *contínuas*, podemos utilizar o instrumental de cálculo para otimizarmos a função que associa estratégias a *payoffs* (a função lucro, $\pi(q_i)$) e encontrarmos funções de melhores respostas.

costumeiramente a equação (26a) é chamada de *curva de reação* da Firma 1 e a equação (26b) é chamada de *curva de reação* da Firma 2. Expressemos novamente essas equações, agora com os seus novos nomes:

(31a) **Curva de reação da Firma 1:** $q_1^* = \dfrac{a - c - bq_2}{2b}$

(31b) **Curva de reação da Firma 2:** $q_2^* = \dfrac{a - c - bq_1}{2b}$

Ora, mas esse sistema já foi resolvido [53] na seção anterior; então, a solução encontrada por Cournot em 1838,$(q_1^*, q_2^*) = (\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b})$, de fato é um equilíbrio de Nash!

Uma maneira bastante conveniente de olhar esse problema de Duopólio de Cournot particular é por meio de uma análise gráfica. Sendo o sistema que desejamos resolver um sistema linear de duas equações, podemos expressá-lo graficamente por meio de duas retas no espaço $q_1 \times q_2$.

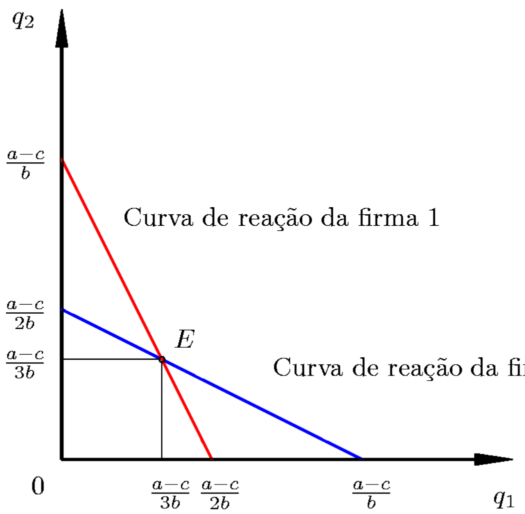

Figura 2: Equilíbrio de Cournot-Nash

[53] Lembremos da hipótese de decisões simultâneas; sem ela, não podemos simplesmente resolver o sistema. Por exemplo, se a Firma 1 pudesse tomar a decisão antes da Firma 2, o resultado seria diferente. A Firma 1 sabe que a Firma 2 fará o melhor possível; então, ela vai produzir levando em conta a reação da Firma 2. A Firma 2, por sua vez, não leva em conta a *reação* da Firma 1, e sim a sua *ação*, visto que ela age antes. Na prática, a Firma 1 substitui na sua função lucro a curva de reação da Firma 2, e otimiza para q_1. O resultado desse problema é uma distribuição desigual do produto e dos lucros, favorecendo a Firma 1. Esse modelo é conhecido como *Duopólio de Stackelberg*, a ser citado na seção 7.

A Figura 2 mostra duas retas; cada uma é a curva de reação de uma firma. A solução, o ponto em que ambas as equações são satisfeitas, é obviamente o ponto dado pela intersecção das duas curvas, o ponto de equilíbrio E.

Cabe ressaltar aqui que o conceito de equilíbrio de Nash não carrega em sua essência um caráter preditório, apesar de muitas vezes ser utilizado para tal fim. Em outras palavras, o equilíbrio de Nash não é uma *previsão* dos resultados de um jogo; ele é na verdade uma *maneira racional* de se jogar o jogo. De fato, é razoável em muitos casos supor que o resultado final de um jogo será o seu equilíbrio de Nash. Ainda que isso fosse sempre verdade, cairíamos em um outro problema: existem jogos com vários equilíbrios de Nash e não há um critério bem aceito para dizer qual desses equilíbrios será o resultado final. Por sinal, essa é uma crítica comum ao conceito do equilíbrio de Nash: na presença de múltiplos equilíbrios, de que serve a noção de equilíbrio?

6 O caso de n firmas.

Já estudamos, na seção 3 o caso de concorrência perfeita; na seção 4, o Duopólio de Cournot; na seção 5, caracterizamos o problema do Duopólio de Cournot como um jogo e vimos que a sua solução é um equilíbrio de Nash. Nesta seção, estenderemos os resultados das duas seções anteriores para o caso de n firmas; ou seja,poderemos lidar agora com um *oligopólio*. Estudaremos em particular os casos em que $n = 1$ e $n \to \infty$.

Bem, o objetivo a que nos propomos nesta seção é relativamente simples. Manteremos as hipóteses gerais especificadas na seção 2 e as hipóteses da seção 4. Faremos apenas uma mudança;

i. Existem n firmas nesse mercado. Assim, $i = 1, \ldots, n$.

O procedimento agora é parecido com o que fizemos na seção 4, no Duopólio de Cournot; devemos encontrar as curvas de reação de cada firma e resolver o sistema gerado por elas. Teremos então um sistema linear de n equações (uma curva de reação para cada uma das n firmas) e n variáveis $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Esperamos encontrar uma solução única [54]. Para isso, ex-

[54] Relembrando um resultado conhecido de álgebra linear; um sistema linear pode possuir (i) uma solução; (ii) nenhuma solução, ou; (iii) infinitas soluções.

pressemos, a título de recordação, o lucro de uma Firma j:

$$\pi_j(q_j) = r_j(q_j) - C_j(q_j) \tag{32a}$$
$$= P(Q)q_j - C(q_j)$$
$$= (a - bQ)q_j - cq_j$$
$$= q_j(a - c - bQ) \tag{32b}$$
$$= q_j[a - c - b(q_1 + q_2 + \cdots + q_j + \cdots + q_{n-1} + q_n)] \tag{32c}$$
$$= q_j(a - c - b\sum_{i=1}^{n} q_i) \tag{32d}$$

Antes de derivar a condição de primeira ordem, é importante lembrar que $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$, ou seja, $Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_j + \cdots + q_{n-1} + q_n$. Isso implica que $Q = Q(q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_{n-1}, q_n)$; ou seja, Q também é função de q_j. Essa clareza quanto a "forma" de Q é importante para efetuar a derivação do lucro com respeito a q_j da maneira correta. Se tivermos isso claro em mente, podemos utilizar a expressão (32b) sem medo de errar. No entanto, se não tivermos isso claro, podemos tratar Q como um parâmetro, e não como uma função de q_j, o que seria um erro. Para evitar confusões, vamos utilizar a expressão (32c) para calcular $\frac{d\pi_j}{dq_j}$.

A C.P.O., $\frac{d\pi_j}{dq_j} = 0$, é a condição de maximização de lucros para qualquer Firma j. Assim, encontremos primeiramente $\frac{d\pi_j}{dq_j}$. Novamente, utilizaremos a regra de diferenciação conhecida como regra do produto. Derivando então a expressão (32c) com respeito a q_j, temos [55]:

$$\frac{d\pi_j}{dq_j} = [a - c - b(q_1 + q_2 + \cdots + q_j + \cdots + q_{n-1} + q_n)] - bq_j$$
$$= (a - c - b\sum_{i=1}^{n} q_i) - bq_j \tag{33}$$

O que nos diz que a C.P.O é que para um certo q_j^*:

$$(a - c - b\sum_{i=1}^{n} q_i) - bq_j^* = 0 \tag{34}$$

Conseqüentemente, a curva de reação da Firma j é:

$$q_j^* = \frac{a - c}{b} - \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{35}$$

[55] Lembrando a discussão do parágrafo anterior, tendo claro que Q é função de q_j, podemos também chegar ao resultado de (33) derivando a expressão (32b) com respeito a q_j. Experimente; você deverá chegar ao mesmo resultado que em (33).

Seguindo o mesmo processo para todas as n firmas, teremos que resolver o seguinte sistema de curvas de reação:

$$\left\{ \begin{aligned} q_1^* &= \frac{a-c}{b} - \sum_{i=1}^{n} q_i \\ q_2^* &= \frac{a-c}{b} - \sum_{i=1}^{n} q_i \\ &\vdots \\ q_j^* &= \frac{a-c}{b} - \sum_{i=1}^{n} q_i \\ &\vdots \\ q_{n-1}^* &= \frac{a-c}{b} - \sum_{i=1}^{n} q_i \\ q_n^* &= \frac{a-c}{b} - \sum_{i=1}^{n} q_i \end{aligned} \right. \tag{36}$$

Repare que o lado direito do sistema (36) é idêntico em todas as equações. Ora, então fica evidente que $q_1^* = q_2^* = \cdots = q_j^* = \cdots = q_{n-1}^* = q_n^*$. Sendo assim, em equilíbrio, $q_i^* = q_j^* \forall \quad i \neq j$. Ou seja, em equilíbrio, a produção de cada firma deve ser *a mesma*. Isso já era esperado, dada a simetria do problema. Denotaremos essa produção de equilíbrio apenas por q^*, sem o sub-índice. A conseqüência disso é que, em equilíbrio, $Q = \sum_{i=1}^{n} q^* = nq^*$; ou seja, a produção total dessa indústria [56] com n firmas é igual a n vezes a produção de uma firma qualquer. Isso também é bastante natural, visto que as produções individuais das firmas são iguais. Assim, se tomarmos uma firma representativa com produção q^*, poderemos facilmente resolver o problema. Vejamos:

$$q^* = \frac{a-c}{b} - \sum_{i=1}^{n} q^* \tag{37a}$$

como $\sum_{i=1}^{n} q^* = nq^*$,

$$q^* = \frac{a-c}{b} - nq^* \tag{37b}$$

[56] Lembrando que indústria é o conjunto de todas as firmas que operam nesse mercado.

colocando os termos que contém q^* à esquerda,

$$q^* + nq^* = \frac{a-c}{b} \tag{37c}$$

fatorando,

$$q^*(n+1) = \frac{a-c}{b} \tag{37d}$$

finalmente, isolando a produção da firma representativa,

$$q^* = \frac{1}{n+1}\left(\frac{a-c}{b}\right) \tag{37e}$$

De sorte que a n-upla $(q_1^*, \cdots, q_n^*) = (\frac{1}{n+1}, \cdots, \frac{1}{n+1})$ é o equilíbrio de Nash desse jogo de Cournot com n firmas. Sendo assim, temos que a produção da indústria em equilíbrio é:

$$Q^* = nq^* = \frac{n}{n+1}\left(\frac{a-c}{b}\right) \tag{38}$$

Vejamos então como fica o preço de equilíbrio do mercado. Tomando a curva de demanda inversa, $P(Q) = a - bQ$, temos:

$$\begin{aligned}
P(Q^*) &= a - bQ^* && \text{(39a)}\\
&= a - b\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{a-c}{b}\right)\\
&= a - \left(\frac{n}{n+1}\right)(a-c)\\
&= \frac{an + a - an + nc}{n+1}\\
&= \frac{a+nc}{n+1} && \text{(39b)}
\end{aligned}$$

Agora, podemos calcular o lucro das firmas e da indústria. Primeiramente, o lucro das firmas:

$$
\begin{aligned}
&(40a) \qquad & \pi_i(q_i^*) &= r_i(q_i^*) - C_i(q_i^*) \\
&& &= P(Q^*)q_i^* - cq_i^* \\
&& &= (P(Q^*) - c)q_i^* \\
&& &= \left[\left(\frac{a+nc}{n+1}\right) - c\right]\frac{1}{n+1}\left(\frac{a-c}{b}\right) \\
&& &= \left(\frac{a+nc-nc-c}{n+1}\right)\frac{1}{n+1}\left(\frac{a-c}{b}\right) \\
&(40b) \qquad & &= \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2
\end{aligned}
$$

Conseqüentemente, o lucro da indústria é:

$$
(41) \qquad \Pi(Q^*) = \frac{n}{b}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2
$$

Podemos agora resumir em um quadro os principais resultados do regime de concorrência de Cournot para o caso de n firmas. Veja a Tabela 3.

Cournot — n firmas	
Preço de mercado	$P^* = \frac{a+nc}{n+1}$
Produto da indústria	$Q^* = \frac{n}{n+1}\left(\frac{a-c}{b}\right)$
Lucro das firmas	$\pi_i(q_i^*) = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$
Lucro da indústria	$\Pi(Q^*) = \frac{n}{b}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$

Tabela 3: Resumo dos resultados do regime de concorrência de Cournot para o caso de n firmas.

Volte à Tabela 2 na página 21 e repare que ela é um caso particular $n = 2$ da Tabela 3. Ainda bem, pois isso é uma confirmação de que os nossos cálculos estão certos!

Agora, vamos à parte mais "chique" desta seção: examinemos os casos em que $n = 1$ e $n \to \infty$. Quanto ao caso $n = 1$, seremos bastante sucintos; basta dizer que, nesse caso, temos uma firma no mercado e o resultado é um *monopólio*. Problemas de monopólio em geral não são resolvidos dessa maneira — resolvendo para n firmas e depois fazendo $n = 1$ — mas sim de uma maneira direta. Num caso de monopólio,$Q = q_1$, de sorte que podemos tratar apenas com a variável Q. Assim, o problema do monopolista é maximizar o seu lucro $\pi(Q) = P(Q)Q - C(Q)$. Derivando com respeito a Q e igualando a zero, temos as condições de primeira ordem, $Rmg = Cmg$. E, resolvendo o problema [57] chegamos aos mesmos resultados que os da Tabela 3 para $n = 1$! Interessante, não? A conclusão é que o resultado de monopólio é um *caso particular* do regime de concorrência de Cournot para n firmas, quando $n = 1$! Expressemos os resultados desse caso particular na Tabela 4.

Cournot — n=1	
Preço de mercado	$P^* = \frac{a+c}{2}$
Produto da indústria	$Q^* = \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b}\right)$
Lucro das firmas	$\pi_1(q_1^*) = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$
Lucro da indústria	$\Pi(Q^*) = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$

Tabela 4: Regime de Cournot com 1 firma — Monopólio.

Poderíamos ter escrito o produto da indústria como *produto do monopolista* e o lucro das firmas ou da indústria como *lucro do monopolista*. Não fizemos isso para manter uma certa padronização das tabelas. Obviamente, o lucro das firmas (considerando que só há uma firma) é igual ao lucro da indústria.

O caso mais interessante, contudo, é o de $n \to \infty$. Nesse caso, estamos fazendo o número de firmas desse mercado crescer *indefinidamente*; em outras palavras, o número de firmas nesse mercado é tão grande quanto se queira. A intuição econômica nos diz que num cenário desses, a concorrência aumenta, o que deve fazer os preços caírem, junto com os lucros. Temos a expectativa também de que a quantidade produzida pela indústria aumente. Vejamos se isso se verifica.

Tomemos os resultados da Tabela 3 e façamos $n \to \infty$. Vejamos:

Produto das firmas;

$$\begin{aligned} q_i^* &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{a-c}{b}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

[57] A resolução desse problema é bem simples; fica como exercício para o leitor.

Produto da indústria;

$$
\begin{aligned}
Q^* &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{a-c}{b}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{a-c}{b}\right) \\
&= \left(\frac{a-c}{b}\right)
\end{aligned} \tag{43}
$$

Preço de mercado;

$$
\begin{aligned}
P^* &= \lim_{n\to\infty} \frac{a+nc}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{n}+c}{1+\frac{1}{n}} \\
&= c
\end{aligned} \tag{44}
$$

Lucro das firmas;

$$
\begin{aligned}
\pi_i(q_i^*) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2 \\
&= \frac{1}{b}\,0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{45}
$$

Lucro da indústria;

$$
\begin{aligned}
\Pi(Q^*) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{b}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{b}\left(\frac{1}{n^2+2n+1}\right)(a-c)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{bn^2+2bn+b}(a-c)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{b+\frac{2b}{n}+\frac{b}{n^2}}(a-c)^2 \\
&= \frac{0}{b}(a-c)^2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{46}
$$

Analisemos os resultados acima junto com os dados das tabelas 3 e 4. Interpretemos esses resultados:

i. Analisando (42), vemos que quando o número de firmas aumenta muito, a quantidade produzida por cada firma tende a diminuir. O valor nulo para o limite (42) nos indica que a quantidade produzida por cada firma pode se tornar tão pequena quanto se queira; para isso, basta aumentar o número de firmas no mercado. Talvez uma idéia mais clara se dê ao computarmos $\lim_{n\to\infty}\frac{q_i^*}{Q^*} = \frac{lim_{n\to\infty} q_i^*}{lim_{n\to\infty} Q^*}$, que, por (42) e (43), é zero. Veja que $\frac{q_i^*}{Q^*}$ é a parcela da produção total devida à produção individual de uma certa firma em equilíbrio. Então, $\lim_{n\to\infty}\frac{q_i^*}{Q^*} = 0$ indica que quando o número de firmas aumenta muito, a parcela da produção total devida a uma firma individual "diminui muito" ou é "muito pequena".

ii. Apesar do produto por firma diminuir, o produto da indústria como um todo está aumentando. A idéia é que a diminuição da produção por firma é mais do que compensada pelo aumento do número de firmas produzindo, sem no entanto fazer a produção da indústria explodir. Isso é evidenciado pela expressão $Q^* = \frac{n}{n+1}(\frac{a-c}{b})$. Tomando $n = 1$ e aumentando, reparamos que Q^* só aumenta [58], até atingir o limite máximo: $Q^* = \frac{a-c}{b}$, dado por (43).

iii. Analisando os dados da Tabela 3 e da equação (44), percebemos que à medida que o número de firmas aumenta, o preço tende a cair. A equação (44) mostra que há um limite para essa queda; o preço cai até que se torne igual ao custo marginal de produção. Obviamente, não poderia cair além disso, pois violaria a hipótese de racionalidade dos agentes; ninguém produziria uma mercadoria que, com o valor de sua venda, não compensasse o seu custo de produção.

iv. Olhando para os resultados (45) e (46) podemos perceber que, com o aumento do número de firmas, tanto o lucro por firma quanto o lucro da indústria no total tende a cair. Naturalmente, existe um limite para essa queda; dada a hipótese de racionalidade ninguém entraria num negócio para ter um lucro negativo[59]; existiriam alternativas melhores de investimento. Sendo assim, o resultado de limite nulo dos lucros em (45) e (46) já é algo até esperado.

[58]Veja que, para $n = 1$ temos $Q^* = \frac{1}{2}(\frac{a-c}{b})$; para $n = 2$, temos $Q^* = \frac{2}{3}(\frac{a-c}{b})$; para $n = 3$, $Q^* = \frac{3}{4}(\frac{a-c}{b})$, e assim por diante. À medida que n cresce, esse processo continua, com a fração $\frac{n}{n+1}$ que multiplica $\frac{a-c}{b}$ aumentando e convergindo para 1. É interessante que o leitor faça uma análise de comportamento desse tipo para os outros resultados também.

[59]Lembrando que isso é um lucro no sentido econômico e não no sentido contábil.

Agora, o mais curioso: note que estes são os mesmos resultados para o caso de concorrência perfeita! Ora, mas então o caso de concorrência perfeita pode ser descrito como um caso particular do regime de concorrência de Cournot para n firmas, quando $n \to \infty$! Para verificar mais detalhadamente, volte à seção 3 e olhe as suas hipóteses. A primeira hipótese da seção 3 afirmava que havia um grande número de firmas; ora, isso é indicado no modelo de Cournot por $n \to \infty$. Ademais, a segunda hipótese dizia que cada firma produzia uma quantidade ínfima do produto total; de fato, é exatamente isso que está expresso na equação (42). Não é de surpreender então que tenhamos em (43), (44), (45) e (46) os mesmos resultados que os da página 16 expressos na Tabela 1!

Vimos nesta seção que tanto o caso de monopólio quanto o caso de concorrência perfeita podem ser descritos como casos particulares do regime de concorrência de Cournot. Vimos também em detalhe como os cálculos desses resultados são feitos. O mais fascinante de tudo isso é que toda a base desse modelo foi desenvolvida por uma mesma pessoa, em 1838, no primeiro tratado matemático significativo sobre economia! Surpreendente, não? E pensar que a academia francesa desprezou o trabalho de Cournot quando da sua publicação...

7 Comentários finais

Chegamos ao fim de uma viagem que foi desde a época de Cournot até meados do século XX. Visitamos um modelo conhecido como *Duopólio de Cournot* e o caracterizamos como um jogo que tem uma solução única particular: *o equilíbrio de Cournot-Nash*. Estudamos as características dessa solução [60]. Estendemos os resultados para o caso de n firmas e verificamos que tanto o caso de monopólio quanto o caso de concorrência perfeita podem ser expressos como um caso particular do regime de concorrência de Cournot. Ao fim de tudo isso cabe avaliarmos o que foi feito até aqui.

Voltemos então até os fundamentos do nosso modelo: as suas hipóteses. A seção 2 nos traz uma série de hipóteses gerais que foram amplamente utilizadas ao longo de todo o texto. Falemos primeiro de uma hipótese particular que é muito importante não só para os modelos deste texto, mas para a grande maioria dos modelos econômicos que existem na literatura: a hipótese da racionalidade dos agentes econômicos. É essa a hipótese que nos permite utilizar o instrumental matemático para extrairmos soluções. Dela derivamos que os agentes apresentam comportamento *otimizador*, por que

[60]Basicamente, as características do equilíbrio de Nash para um jogo na forma estratégica.

se assim não fosse, não estariam fazendo o melhor para si mesmos, o que violaria a hipótese de racionalidade. Uma vez que os agentes apresentem comportamento otimizador, basta então encontrar funções que exprimam os objetivos daquele agente (as chamadas *funções objetivo*) e então otimizá-las segundo o objetivo do agente. No caso desse texto, o agente estudado era uma firma e a sua função objetivo era uma função lucro; o objetivo, dada a racionalidade das firmas, é maximizar lucros. Sendo assim, basta maximizar a função lucro. Para isso só precisamos de instrumentos básicos de cálculo diferencial.

Tomemos agora outras hipóteses, algumas bastante restritivas. Por exemplo, a homogeneidade dos bens. No mundo real, as pessoas costumam ter preferências diferentes por uma marca ou outra [61], ou ainda por variedades parecidas de um mesmo bem [62]. No entanto, se não adotássemos essa hipótese, não conseguiríamos agregar todos os consumidores de um dado mercado em uma mesma curva de demanda; haveria curvas de demandas específicas para cada produto, e não para cada mercado. É importante dizer que, mesmo assim, existem modelos capazes de lidar com compradores e vendedores que desejem transacionar um bem não-homogêneo [63].

Outro ponto que vale a pena frisar é a hipótese de *informação perfeita e completa*. Talvez essa seja a mais irrealista das hipóteses assumidas no nosso texto. Ela nos diz que todos os agentes estão perfeitamente informados sobre o ambiente que os cerca e sobre as ações e/ou preferências dos outros agentes! Para se ter uma idéia, num mundo de informação completa e perfeita, uma firma *nunca* pode esconder sua estratégia de mercado [64]; um

[61] O que não quer dizer que ela só compre de uma marca ou de outra; quer dizer que ela dá uma valoração a mais ou a menos para um certo produto dependendo da marca do produto.

[62] Apartamentos em locais diferentes, por exemplo. Obviamente, um consumidor qualquer valora um apartamento a depender da sua localização. Carros também são um bom exemplo.Raramente um consumidor é indiferente entre qualquer sedã médio; em geral, ele tem preferências quanto aos diferentes modelos de um mesmo segmento.

[63] Um tipo particular de modelo desse tipo é o que se chama na literatura de *assignment game*. Nesse tipo de modelo, há um mercado de dois lados. De um lado, vendedores de uma única mercadoria; do outro, compradores interessados na compra de uma única mercadoria. O bem pode apresentar diferenças visíveis aos jogadores (bem não-homogêneo). No entanto, o instrumental de cálculo é inútil para resolver esse tipo de problema; a solução de um *assignment game* envolve uma *programação linear*. Não discutiremos esse tópico aqui. Uma referência em português é Barcelos (2003). Cabe ressaltar que os *assignment games* são assuntos que entram na esfera dos jogos *cooperativos*, diferente do que vimos aqui.

[64] Ainda que essa firma possa esconder de outras firmas os segredos técnicos da sua tecnologia, ela não pode esconder que possui essa tecnologia. Ou seja, ainda que as outras firmas não saibam tecnicamente *como* produzir segundo a tecnologia da outra firma, elas

funcionário *nunca* pode esconder do seu chefe que ele não trabalhou durante a manhã! Dúvidas quanto às ações ou às características, objetivos dos outros agentes simplesmente não existem! Isso restringe muito o tipo de modelo que podemos trabalhar. Tomando o nosso modelo como exemplo, as duas firmas sabiam exatamente a tecnologia de produção da outra firma (eram tecnologias idênticas, segundo as hipóteses da seçao 3) por causa da hipótese de informação completa; o resultado disso é que uma firma conhecia a função lucro da outra. Sendo assim uma podia prever exatamente como a outra reagiria, dada a hipótese de racionalidade.

A hipótese de informação simétrica, perfeita e completa torna razoável a adoção de uma outra hipótese: a de que a firma é um único bloco decisório, onde não há conflitos de interesses (ver seção 3). É razoável dizer que uma firma é uma entidade monolítica que maximiza lucros? De fato, não. Se paramos pra pensar, vemos que as decisões tomadas por uma firma são em geral ordens de um administrador; ademais essas ordens são levadas a cabo por uma série de funcionários. Tanto administrador quanto funcionários não necessariamente têm os mesmos objetivos que os do dono (ou donos) da firma; ou seja, nem tudo está corretamente ajustado para que ocorra a maximização de lucros tecnicamente possível. Tomemos o caso de um admnistrador que é o dono da companhia. É bastante lógico que o administrador/dono só possa tomar decisões ótimas se ele conhecer *perfeitamente* a estrutura produtiva da sua firma. Ou seja, ele deve ter acesso completo a todas as informações relativas à produtividade da firma. Isso é possível? Lembre que produtividade inclui a produtividade dos funcionários. É possível saber a produtividade de cada funcionário, de forma a dar-lhe ordens que possibilitem a maximização do lucro da firma? Essa pergunta é de fundamental importância, pois o administrador/dono corre o risco de dar uma tarefa muito complicada para uma pessoa pouco produtiva (o que seria ineficiente devido à sobrecarga) ou dar uma tarefa muito fácil para alguém muito produtivo (o que seria ineficiente devido à capacidade ociosa desperdiçada). E sabendo disso, o que impediria, por exemplo, que a pessoa muito produtiva de tentar se passar por uma improdutiva simplesmente para não ter que fazer trabalho pesado [65]?

É importante notar que, mesmo que ele saiba a produtividade de todos os funcionários, nada (além da moral interna de cada indivíduo, o que não é objeto de estudo da economia) garante que eles seguirão as ordens ao pé da letra. Suponha que um certo funcionário execute um trabalho cujo es-

---

sabem que a outra firma possui essa certa tecnologia e sabe quais são os resultados disso.

[65] Quantos de nós já não ouviu alguém dizer: "Ah, lá no trabalho você não pode se oferecer para fazer muitas coisas não; se você começa a querer mostrar serviço, as pessoas começam a te dar cada vez mais tarefas ... É melhor ficar quieto e fazer só o que for pedido."

forço é impossível de ser verificado por um período de tempo [66]. O que garante que esse funcionário não vá "relaxar" [67] e fazer o serviço de qualquer jeito, aproveitando-se de um salário enquanto isso? Se o administrador não for o dono da firma, o que garante que o administrador não vai tomar decisões em benefício próprio que se choquem com os objetivos da firma [68]? Repare que todas esses problemas surgem devido a um único problema: existem informações sobre os agentes econômicos que são informações *privadas* e não-observáveis por outros agentes. Devido à *assimetria de informações* que resulta de tal fenômeno, surge um *incentivo* para *comportamento oportunista* dos agentes. Nos exemplos dados nesta seção, as informações privadas dos agentes eram a sua produtividade e esforço. A assimetria de informações surgia do fato de o chefe não poder observar tais informações. Sabendo disso, os funcionários têm incentivo para se comportar oportunisticamente, seja tentando se passar por um outro tipo de pessoa, seja se esforçando pouco. Assim, o chefe ou dono da firma tem que dar um jeito de criar incentivos [69] para que os agentes não ajam de maneira indesejável. Em geral há uma série de custos [70] envolvidos no desenho de contratos que criem os incentivos corretos; há um *tradeoff* entre *provisão de incentivos* e *eficiência*. Problemas que surgem devido à assimetria de informações sobre *características intrínsecas* dos agentes (como induzir alguém produtivo a se passar por uma pessoa improdutiva simplesmente para não ter que trabalhar muito) são chamados problemas de *seleção adversa*. Por sua vez, problemas que surgem devido à assimetria de informações quanto ao *esforço* dos agentes (como induzir um funcionário a não se esforçar no trabalho) se enquadram em problemas de *incentivo adverso* ou de *risco moral* [71]. Esses tipos de problema (e as suas possíveis soluções, como um desenho de contratos que alinhe corretamente

[66] Por exemplo, um técnico em eletrônica que conserta uma TV e a fecha logo em seguida; ele pode ter colocado peças de baixa qualidade e ninguém vai saber. Ou ainda, um professor universitário que passa a maior parte do tempo trancado em uma sala; ele pode estar pesquisando, fazendo atividades ligadas à universidade, ou pode simplesemente estar dormindo, lendo revistas ou resolvendo problemas pessoais. Novamente, não há como saber o que ele está fazendo; é muito difícil verificar o seu esforço em fazer um bom trabalho.

[67] Tecnicamente, chama-se isso de *subprovisão de esforço*.

[68] Utilizando o jatinho da empresa para viagens particulares, por exemplo.

[69] Por meio do que se chama de *desenho de contratos*. A idéia é que os contratos fornecem os incentivos com os quais os agentes se deparam. Assim, se um empresário quer oferecer contratos de trabalho que permitam a firma ser o mais eficiente possível, ele deve *desenhar* os contratos de forma que haja uma alocação eficiente de funcionários e que eles se esforcem. Esse assunto é tratado em áreas como *economia da informação* ou dos incentivos, ou ainda na *teoria dos contratos*.

[70] Os chamados *custos de agência* ou de agenciamento, mencionados anteriormente.

[71] Mais comumente referido como *moral hazard*, um termo oriundo da literatura sobre seguros.

os incentivos de ambas as partes) são alvo de um ramo da economia que se chama *economia da informação* ou dos incentivos [72] Infelizmente, não tratamos desse assunto aqui. No entanto, é imporante frisar que se trata de um tópico evidentemente muito importante.

Há ainda outras hipóteses, como a estaticidade dos modelos das seções 4, 5 e 6. Lembre que em todos esses modelos, supomos decisões simultâneas, não seqüenciais. Isso quer dizer que o jogo é o que costuma-se chamar de um jogo *one-shot*; há apenas um estágio de decisão, e daí os resultados são obtidos. Tomando um caso de duopólio, como na seção 4, para ilustrar, é evidente que não é necessário que as firmas tomem decisões simultâneas de produção. Pode ser que uma decida produzir e que a outra tome as suas decisões de produção depois. Naturalmente, espera-se que a firma que toma a decisão primeiro — a chamada *firma líder* — tenha alguma vantagem nesse cenário, já que ela sabe que a outra firma vai se adaptar à sua produção. De fato, um modelo conhecido como *Duopólio de Stackelberg* representa uma situação desse tipo, e os seus resultados indicam realmente que a firma líder leva uma vantagem nesse mercado.

Outra hipótese, talvez não tão evidente, é a de que firmas competem via manipulação de quantidade produzida. De fato, nos nossos modelos, a variável de escolha das firmas sempre era a quantidade produzida. Ora, mas o que impede que as firmas concorram via preços? De fato, foi esse o argumento que Bertrand lançou numa resenha do trabalho de Cournot em 1883. O surpreendente é que ele chegou a um resultado de concorrência perfeita, mesmo com apenas duas firmas! O argumento dele era que quem praticasse o menor preço, levava todo o mercado. Ora, o equilíbrio desse jogo é que as firmas pratiquem o preço mais baixo possível, igual ao custo marginal, o que é idêntico à solução de concorrência perfeita [73]!

Apesar de todas essas críticas, o modelo aqui apresentado é dotado de grandes qualidades. É importante frisar que modelos parcimoniosos como esse são uma base sólida para o desenvolvimento de modelos mais sofisticados (como os que comentamos nos parágrafos anteriores). É também notável o fato de esse modelo nos fornecer idéias bastante claras e simples sobre o funcionamento dos mercados de uma maneira relativamente descomplicada

[72] Uma excelente referência na área é Laffont e Martimort (2002). Esse livro lida com modelos do tipo *principal-agente*; diz-se que a parte que oferece o contrato é o *principal*; a parte que reage ao contrato é o *agente*. Ele não só decide se aceita ou não o contrato como também decide, uma vez que tenha aceito o contrato, como vai se comportar frente aos incentivos que o contrato oferece.

[73] Um resultado fácil de se demonstrar utilizando o conceito de equilíbrio de Nash. Se houver maiores dificuldades, consultar as obras de referência, como Kupfer e Hasenclever (2002), Nicholson (2002) ou Varian (2000).

[74]; repare que para chegar aos resultados aqui obtidos, pouco além de um conhecimento básico de cálculo foi necessário. De fato, precisamos apenas de algumas noções básicas de teoria dos jogos e alguma desenvoltura com operações com somatórios e sistemas lineares extremamente simples. Isso acaba sendo bastante estimulante, uma vez que fica claro que importantes resultados podem ser extraídos de modelos muito simples. Se pararmos pra pensar, quantas conclusões tiramos ao longo do texto de uma forma relativamente fácil? Mais importante, quantas conclusões tiramos ao longo do texto de uma forma *segura*? Repare que, para chegarmos aos resultados, adotamos *explicitamente* uma série de hipóteses e seguimos um encadeamento lógico rigoroso. Essa metodologia [75] é muito facilitada pela adoção de princípios de lógica matemática, e é de fundamental importância para o desenvolvimento rigoroso de modelos bem acabados, sejam eles no campo das ciências naturais ou no campo das ciências sociais. Se esse texto conseguir transmitir essa idéia, uma grande parte do seu objetivo terá sido alcançado.

Referências

Barcelos, R. M. (2003, Março). The assignment games. Monografia do PET-ECO sob orientação do professor Rodrigo Peñaloza, da Universidade de Brasília. A ser publicado. 63

Bugarin, M. e M. Sotomayor (2002). Fundamentos de teoria dos jogos não-cooperativos. Notas de aula para o Mini-curso de Abertura do Semestre Letivo I/2002 no Departamento de Economia da Universidade de Brasília. 45, 46, 47

Kupfer, D. e L. Hasenclever (Eds.) (2002). *Economia Industrial*. Editora Campus. 7, 73

Laffont, J. J. e D. Martimort (2002). *The Theory of Incentives — The Principal-Agent Model* (1ª ed.). Princeton University Press. 40, 72

Nash, J. F. (1950). Equillibrium points in n-person games. Em H. W. Kuhn (Ed.), *Classics in Game Theory*, pp. 3–4. Princeton University Press. 43, 44

Nicholson, W. (2002). *Microeconomic Theory — Basic Principles and Extensions* (8ª ed.). Thomson Learning, Inc. 73

[74] E divertida!

[75] Chama-se o método utilizado neste texto de um método *hipotético-dedutivo*; ou seja, um método que se utiliza dos valores encontrados através do levantamento de hipóteses para a formulação de deduções.

Rubinstein, A. e M. J. Osborne (1994). *A Course in Game Theory* (1ª ed.). The MIT Press. 45, 46, 47

Varian, H. (2000). *Microeconomia — Princípios Básicos*. Editora Campus. Tradução da 5ª ed. americana. 7, 73