Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

Prova 1 - 1.º/2004 - 19/04/2004

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1, a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta a caneta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a $0,5$ ou a $-0,5$, conforme a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco, com marcação rasurada ou com dupla marcação terão valor igual a zero.

1) Considere a função $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Pode-se mostrar que a inclinação da reta L_a, que é tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P_a = (a, f(a))$, é dada por $\dfrac{-1}{2a\sqrt{a}}$. A figura abaixo ilustra o gráfico da função, a reta L_a e os pontos Q_a e R_a em que a reta intercepta os eixos coordenados.

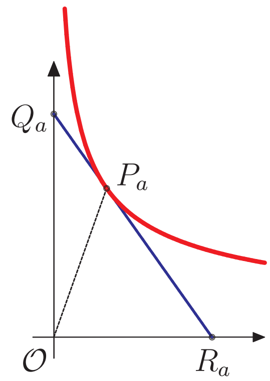
C | E a) A reta L_a tem equação $y = \dfrac{-x}{2a\sqrt{a}} + \dfrac{3}{2\sqrt{a}}$.

C | E b) Tem-se que $R_a = (2a, 0)$.

C | E c) A área do triângulo $\mathcal{O}P_aR_a$ é igual a $\dfrac{1}{2}2af(a)$.

C | E d) A área do triângulo $\mathcal{O}\,P_a\,Q_a$ é igual a $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2\sqrt{a}}a$.

C | E e) Para todo $a > 0$, a área do triângulo $\mathcal{O}P_aQ_a$ é o dobro da área do triângulo $\mathcal{O}\,P_a\,R_a$.



2) Suponha que, para a fabricação de CD's, deve-se produzir disco plástico de raio 6 cm e área igual a $A(6) = \pi 6^2$ cm^2. No entanto, devido ao processo de fabricação, o disco produzido tem raio $r = 6 + h$ cm e área $A(r) = \pi(6+h)^2$ cm^2, em que $|r-6| = |h|$ é o erro no raio do disco. Como a qualidade de gravação do CD depende da precisão da área do disco, o erro $|h|$ deve ser pequeno para minimizar os erros de gravação. Suponha que o erro $|h|$ seja sempre menor que 1 cm, e portanto $|h|^2 \leqslant |h|$.

a) Determine constantes a e b tais que $A(6+h) - A(6) = a\,h + b\,h^2$.

Resposta:

b) Usando que $|h|$ é sempre menor do que 1, determine uma constante $K > 0$ tal que $|A(6+h) - A(6)| \leqslant K\,|h|$.

Resposta:

c) Obtenha $\delta > 0$ com a propriedade de que, se o erro no raio for inferior a δ, então o correspondente erro na área será inferior a 1 cm^2.

Resposta:

d) Use os itens anteriores e a definição de limite para verificar que $A(r)$ é uma função contínua no ponto $r_0 = 6$.

Resposta:

3) Suponha que um reservatório, inicialmente com 50 litros de água pura, comece a ser abastecido com água salgada à razão de 5 litros/min e com uma concentração de 1 grama/litro de sal. Nesse caso, o volume de água $V(t)$ e a quantidade de sal $Q(t)$ no reservatório são funções do tempo $t \geqslant 0$, e portanto a concentração de sal $c(t)$ no reservatório é também uma função do tempo.

a) Obtenha as expressões das funções $V(t)$, $Q(t)$ e $c(t)$.

b) Para $h \neq 0$, simplifique a expressão do quociente $\dfrac{c(t+h) - c(t)}{h}$.

c) Calcule o limite $c'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c(t+h) - c(t)}{h}$.

d) Usando o item anterior, decida em qual dos instantes $t_0 = 10$ ou $t_1 = 30$ a concentração está variando mais rapidamente.

4) Considere o problema de modelar a taxa de produção de fotossíntese $F(x)$ em função da intensidade luminosa $x \geqslant 0$ a que uma planta está exposta. Espera-se que $F(x)$ seja pequena para valores pequenos de x, e aumente com o aumento de x. No entanto, a partir de um valor crítico x_0, a intensidade luminosa passa a ser um fator inibidor da fotossíntese, e portanto $F(x)$ deve ser pequena para valores grandes de x. Conforme ilustra os itens a seguir, esse comportamento está espelhado no modelo $F(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Determine um número $\delta > 0$ tal que, se $x \in (0, \delta)$, então $0 < F(x) < 0,3$ ($F(x)$ é pequena se x é pequeno).

b) Determine um número $M > 0$ tal que, se $x > M$, então $0 < F(x) < 0,3$ ($F(x)$ é pequena se x é grande).

c) Calcule a função derivada de $F(x)$.

d) Sabendo que $F(x)$ é crescente (decrescente) no intervalo em que $F'(x)$ é positiva (negativa), determine o valor crítico x_0 mencionado acima.