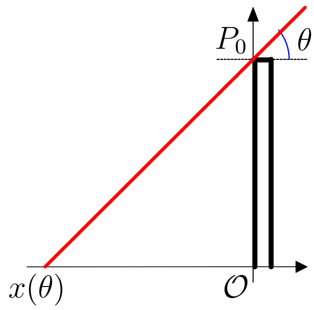
Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

Lista de Exercícios – Semana 2 – 2.º/2004

As listas de exercícios constam de questões extraídas de provas anteriores, e a referência no início de cada questão indica o semestre da prova correspondente. Foram feitas pequenas adaptações para adequá-las aos conteúdos das respectivas semanas. Os textos integrais das provas anteriores estão disponíveis no CD do *e*-Cadernos de Cálculo.

1) **[2.º/2002]** No sistema de eixos mostrado na figura ao lado, suponha que $P_0 = (0, 20)$ representa a quina de um edifício de 20 m e que θ representa o ângulo que os raios solares fazem com a horizontal. Para $\theta \in (0, \pi/2)$, indique por L_θ a reta de coeficiente angular $\operatorname{tg}(\theta)$ que passa por P_0. Indique ainda por $x = x(\theta)$ o ponto em que a reta L_θ intercepta o eixo $\mathcal{O}x$. Nessas condições, julgue os itens a seguir.



C | E a) A reta L_θ tem equação $y = \operatorname{tg}(\theta)(x - 20)$.

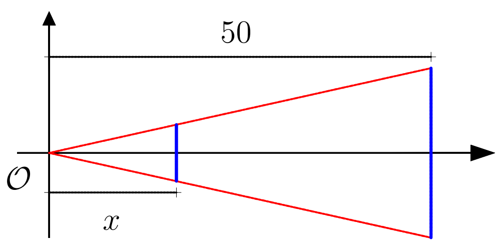
C | E b) $|x(\pi/4)| = 20$.

C | E c) O valor de $x(\theta)$ é dado por $x(\theta) = -\dfrac{20}{\operatorname{tg}(\theta)}$.

C | E d) Se $\operatorname{tg}(\theta) = \sqrt{3}/3$, então o ponto $P = (-5\sqrt{3}, 10)$ está em uma região ensolarada.

C | E e) O ponto $Q = (-20, 10)$ está em uma região ensolarada apenas para os ângulos θ tais que $\operatorname{tg}(\theta) > 1/2$.

2) **[1.º/2003]** Um foco de luz é colocado a uma distância de x m de um anteparo quadrado de lado igual a 1 m, como ilustra a figura abaixo, em que o foco de luz está na origem $\mathcal{O}$, o eixo $\mathcal{O}x$ é ortogonal ao anteparo e passa pelo seu centro. A figura ilustra ainda a sombra do anteparo projetada em uma parede situada a 50 m do foco de luz e paralela ao anteparo. É claro então que a área A da sombra depende da distância x do anteparo ao foco de luz, sendo assim uma função $A = A(x)$, com $x \in (0, 50)$.



a) Determine a função $A(x)$.

Resposta:

b) Determine os valores de $x \in (0, 50)$ para os quais $A(x) < (1,25)^2$.

Resposta:

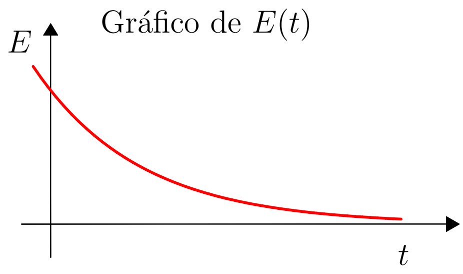
c) Determine os valores de $x \in (0, 50)$ para os quais $A(x) > 100^2$.

Resposta:

d) Verifique que, para qualquer número $d > 1$, existe $c \in (0, 50)$ tal que $A(c) = d$.

Resposta:

3)[**2.ᵒ/2003**] Suponha que, em um ambiente com capacidade de sustentar um número limitado de indivíduos, a população $P(t)$ seja modelada pela função $P(t) = \dfrac{1100}{1 + 9\,E(t)}$, em que $E(t) = 3^{-t}$ é uma função exponencial, o tempo $t \geqslant 0$ é medido em anos e $t = 0$ corresponde à população inicial $P(0)$. O gráfico da função $E(t)$, ilustrado na figura abaixo, pode ser útil no estudo do comportamento de $P(t)$. A partir dessas informações, julgue os itens a seguir.



C E a) A população inicial é superior a 100 indivíduos.

C E b) A função $f(t) = 1 + 9\,E(t)$ é tal que $f(t_1) < f(t_2)$ sempre que $t_1 < t_2$.

C E c) $P(t)$ é uma função decrescente da variável t

C E d) A população supera 600 indivíduos depois do início do terceiro ano.

C E e) Com o passar dos anos, a população tende a se estabilizar em um número inferior a 1000 indivíduos.

4) [**1.ᵒ/2004**] Suponha que, para a fabricação de CD's, deve-se produzir disco plástico de raio r_0 cm e área igual a $A(r_0) = \pi r_0^2$ cm^2. No entanto, devido ao processo de fabricação, o disco produzido tem raio $r = r_0 + h$ cm e área $A(r) = \pi(r_0 + h)^2$ cm^2, em que $|r - r_0| = |h|$ é o erro no raio do disco. Como a qualidade de gravação do CD depende da precisão da área do disco, o erro $|h|$ deve ser pequeno para minimizar os erros de gravação. Suponha que o erro $|h|$ seja sempre menor que 1 cm, e portanto $|h|^2 \leqslant |h|$.

a) Determine constantes a e b tais que $A(r_0 + h) - A(r_0) = a\,h + b\,h^2$.

Resposta:

b) Usando que $|h|$ é sempre menor do que 1, determine uma constante $K > 0$ tal que $|A(r_0 + h) - A(r_0)| \leqslant K\,|h|$.

Resposta:

c) Obtenha $\delta > 0$ com a propriedade de que, se o erro no raio for inferior a δ, então o correspondente erro na área será inferior a 1 cm^2.

Resposta:

d) Dado uma margem de tolerância $\epsilon > 0$, determine uma margem de segurança $\delta > 0$ tal que, se $0 < |h| < \delta$, então $|A(r_0 + h) - A(r_0)| < \epsilon$.

Resposta: