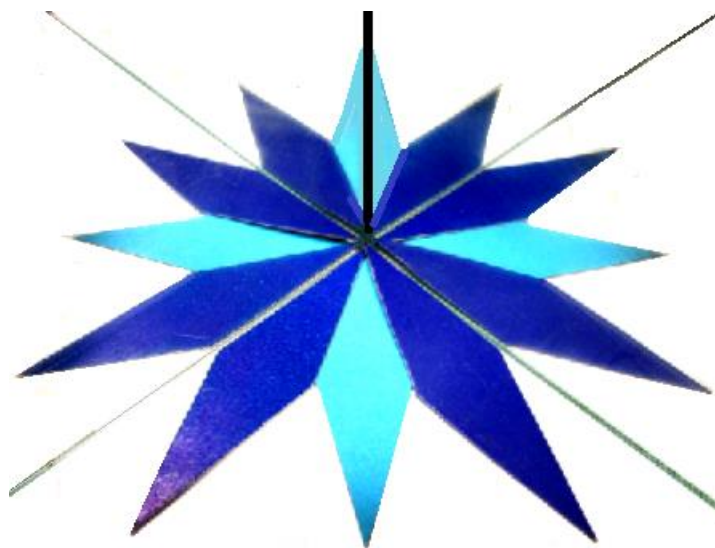


CALEIDOSCÓPIOS DIÉDRICOS

SIMETRIAS NO PLANO



Introdução

O conceito de simetria de figuras planas representadas em obras de arquitetura, de arte, de decoração e em numerosos exemplos naturais, intuitivamente está associado à ordem, à harmonia e a uma relação equilibrada entre o total e suas partes.

Damos a definição matemática de simetria:

Uma *simetria* de uma figura \mathcal{F} é toda transformação T que deixa a \mathcal{F} inalterada mesmo que elementos particulares de \mathcal{F} podem ter sido transformados, isto é, T é uma transformação tal que $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ e $T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Simetrias das figuras planas:

- *Simetria axial ou simetria de reflexão com respeito a uma reta*: se existe uma reta tal que a cada ponto da figura corresponde outro ponto distinto da figura situado em posição idêntica com respeito à reta. Portanto, uma figura tem simetria de reflexão se existe uma reta, pelo menos, que determina duas partes da figura tais que uma delas é a imagem refletida da outra. A reta é um *eixo de simetria* da figura. Uma figura tem *simetria bilateral* se ela possui um único eixo de simetria.

Por exemplo, na representação de uma faixa ou padrão unidimensional:



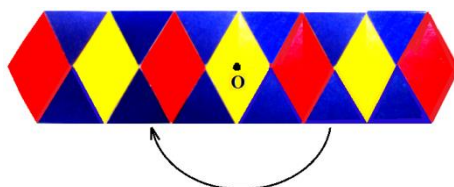
Se a figura acima é virada ou refletida na reta vertical ou na reta horizontal, a figura resultante depois dessas transformações se vê idêntica a figura original.



- *Simetria cíclica ou simetria rotacional*: se a figura permanece inalterada ao efetuar uma rotação em volta de um ponto fixo e segundo um ângulo menor de 360° . O ponto fixo é o centro de rotação. A *ordem* da simetria rotacional é o número de giros ou de rotações que devem ser aplicados na figura para que ela retorne à posição original, neste caso o ângulo de rotação é um ângulo divisor de 360° . Se ao girar uma figura em volta de um ponto fixo ela somente retorna a posição original ao efetuar uma volta completa de 360° então a figura não tem simetria de rotação.

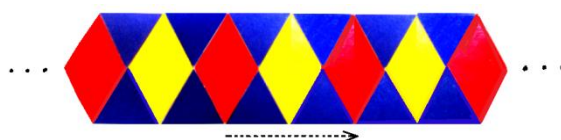
- *Simetria central*: se existe um ponto O tal que para cada ponto da figura corresponde outro ponto da figura tal que O é o ponto médio do segmento que une esses dois pontos. Portanto, a figura tem simetria central se ao efetuar um meio-giro ou uma rotação de 180° a figura permanece inalterada. O ponto O é o *centro de simetria* da figura.

Exemplo. Efetuando uma rotação da figura em torno do ponto fixo O resulta uma figura idêntica à figura original.



- *Simetria de translação*: se uma figura é trasladada uma distância fixa em uma determinada direção e resulta uma figura idêntica a figura original, isto é, a figura permanece inalterada.


Por exemplo, consideramos uma faixa que se estende indefinidamente em ambas direções e colocamos três pontos em cada extremo para indicar que ela continua.



Se a figura é deslizada ou trasladada para a direita segundo a seta tracejada, resulta o mesmo padrão unidimensional, ou seja, a figura tem simetria de translação.

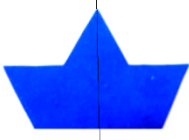
Exemplos de simetrias de figuras planas.

Simetria axial:




A figura tem seis eixos de simetria (as cores não são levadas em consideração).

Simetria bilateral:




A figura tem um eixo de simetria.

Simetria rotacional:



A figura tem simetria rotacional de ordem três e tem um centro de rotação.
Não tem simetria axial e não tem simetria central.

Simetria central:



A figura tem simetria rotacional de ordem 4, tem centro de simetria e não tem simetria axial.

As *isometrias no plano* são as transformações ou movimentos rígidos definidos no plano que mantem inalterada a distância entre os pontos das figuras; portanto, preservam as figuras, mantendo a forma e o tamanho das mesmas.

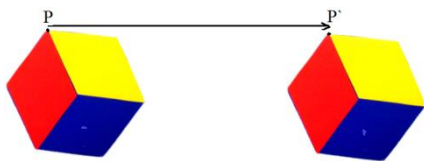
As isometrias no plano são:

- Translação
- Rotação
- Reflexão em uma reta
- Translação refletida ou reflexão deslizante.

As isometrias no plano são as transformações que determinam as simetrias das figuras no plano. Portanto, no estudo das simetrias no plano é importante primeiro abordar as isometrias no plano e adquirir familiaridade com as ações das isometrias no plano sobre as figuras planas.

Translação: move os pontos do plano uma distância fixa, numa mesma direção e sentido. Na translação tudo se conserva, menos a posição.

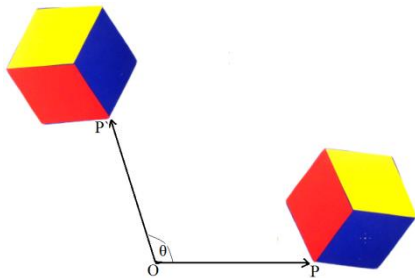
Exemplo de translação de uma figura no plano:



O vetor $\overrightarrow{PP'}$ indica a direção, o sentido e a distância da translação.

Rotação: movimentamos os pontos do plano em torno de um ponto fixo, segundo um ângulo dado e em sentido horário (ângulo negativo) ou em sentido anti-horário (ângulo positivo). O ponto fixo e o ângulo são o centro de rotação e o ângulo de rotação, respectivamente. Na rotação o único ponto fixo é o centro de rotação

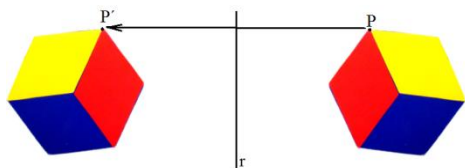
Exemplo de rotação de uma figura no plano



O ponto O é o centro de rotação; o ângulo $\hat{\theta} = \widehat{POP'}$ é o ângulo de rotação, é ângulo com sentido anti-horário portanto mede -70° . O único ponto fixo é o ponto O.

Reflexão ou reflexão numa reta r: movimentamos todo ponto P do plano num ponto P' tal que r é a mediatriz do segmento PP'. A reta r é o eixo de reflexão e os pontos de r são os únicos pontos fixos para a reflexão nessa reta.

Exemplo de reflexão de uma figura no plano.

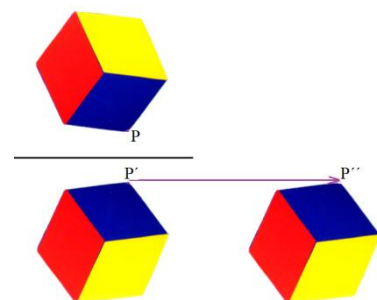


Para cada ponto P da figura existe P', a imagem refletida de P com respeito a r. A reta r é a mediatriz do segmento PP'.

Translação refletida ou reflexão transladada ou glissoreflexão: é a transformação resultante de uma reflexão numa reta r seguida de uma translação segundo um vetor \vec{v} dado.

Exemplo de translação refletida no plano.

O ponto P é refletido em P' e P' é transladado em P''.



Uma reflexão inverte o sentido das figuras, assim observamos que se o movimento das agulhas do relógio aparece no sentido anti-horário na figura original então na figura refletida essas mesmas agulhas vão ao contrário, ou seja, no sentido horário.

Por exemplo, na figura ao lado, pode-se observar que o lado esquerdo da figura corresponde ao lado direito da imagem refletida.

As reflexões são pensadas frequentemente como imagens refletidas num espelho colocado sobre o eixo de reflexão. Assim, para achar ou para construir a imagem refletida de figuras planas são utilizados espelhos planos colocados sobre o eixo de reflexão.



Ao fazer duas reflexões sucessivas em retas paralelas resulta uma translação. A distância entre cada ponto da figura original e o correspondente ponto da figura transladada é o dobro da distância entre as retas paralelas.

Espelhos paralelos são ferramentas para verificar a imagem de uma figura por uma translação.



O resultado de fazer duas reflexões sucessivas em retas que se interceptam é uma rotação com centro no ponto de intersecção das retas e com ângulo de rotação que mede o dobro do ângulo entre as duas retas.

Espelhos que se interceptam formando um ângulo diedro servem para visualizar a rotação de uma figura em volta do ponto de apoio dos dois espelhos.

Na figura observamos a rotação de uma figura em dois espelhos que formam um ângulo diedro que mede 90° .



Também podemos notar em dois espelhos que se interceptam que a rotação da figura tem um ângulo de rotação que mede o dobro do ângulo formado pelos dois espelhos.

Da definição segue que se uma figura é submetida a duas reflexões consecutivas em retas paralelas e a continuação a uma reflexão em uma reta perpendicular as anteriores obtemos uma imagem que é a translação refletida da original.

Descrição

Os *caleidoscópios* são instrumentos formados por dois, três ou quatro espelhos articulados, adequadamente colocados, para produzir múltiplas imagens refletidas. A forma e a dimensão das imagens são determinadas pelo número e pela posição dos espelhos e também pelos ângulos segundo os quais eles são colocados. As cores e os padrões resultam dos objetos visualizados.

Desde a sua invenção por Sir David Brewster, em 1816, muitos e variados modelos de caleidoscópios foram construídos no mundo, muitos deles são exibidos em vastas coleções particulares. Atualmente são desenvolvidos sistemas novos e complicados.

Os instrumentos formados por dois, três ou quatro espelhos perpendiculares a um plano são chamados caleidoscópios diédricos ou caleidoscópios planos. Os modelos mais comuns são os de dois espelhos, eles produzem uma imagem central, e os de três espelhos, os quais produzem imagens refletidas em todo o campo de visão. Estamos interessados em modelos simples, de fácil montagem e realizados com materiais de baixo custo, acessíveis a qualquer orçamento escolar.

Os *caleidoscópios diédricos* são importantes ferramentas para criar com rapidez, interpretar e estudar variadas imagens geométricas e também para determinar, visualizar e compreender distintos tipos de simetrias das figuras planas. Nas atividades para reconhecimento e classificação das simetrias das figuras planas utilizamos modelos físicos e damos prioridade ao uso de espelhos para a determinação das mesmas.

Existem distintos tipos de caleidoscópios diédricos ou caleidoscópios planos, apresentamos os seguintes:

- Livro de espelhos
- Caleidoscópio diédrico duplo
- Conjunto formado por dois espelhos paralelos
- Caleidoscópio diédrico triplo
- Caleidoscópio clássico
- Caleidoscópio diédrico quadrangular com quatro espelhos

Para cada um dos caleidoscópios listados mostramos modelos aptos para serem usados em sala de aula, damos exemplos de suas aplicações no estudo geométrico e também as indicações para a construção dessas peças.

Caleidoscópio diédrico ou livro de espelhos ou caleidoscópio plano

O *caleidoscópio diédrico* consiste em dois espelhos articulados como as folhas de um livro. Este recurso facilita a realização de diversas explorações de imagens, de reflexos das figuras e dos objetos, a percepção das propriedades das imagens refletidas e das simetrias das figuras planas. Exemplos de algumas de suas aplicações são as seguintes:

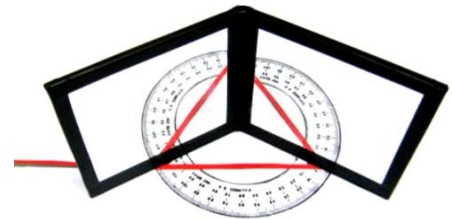
➤ *Formação de polígonos*

Abrir o livro de espelhos sobre uma cópia de um transferidor ou círculo graduado e manter uma das folhas do livro perpendicular na graduação zero do transferidor.

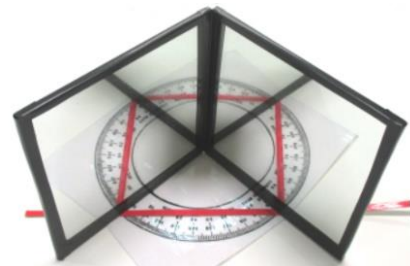


A variação da abertura dos espelhos, isto é, a variação da medida do ângulo diedro que formam os espelhos e o posicionamento adequado da fita de papel revelam as imagens dos outros polígonos regulares convexos, onde o menor dos ângulos formado pelos dois espelhos é o ângulo central do correspondente polígono.

As folhas de espelhos abertas segundo um ângulo de 120° e uma fina fita de papel colocada entre os espelhos resultam na formação de um triângulo equilátero.

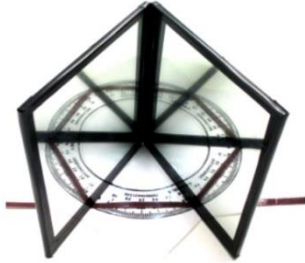


Se as folhas do livro de espelhos formam ângulo diedro medindo aproximadamente 90° então é formado um quadrado.



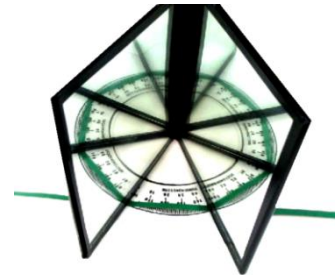
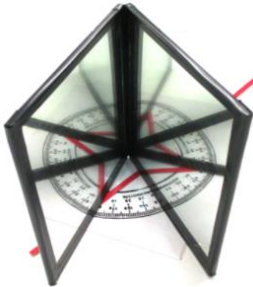
Nas seguintes representações pode-se observar que assim que a medida do ângulo diedro formado pelos espelhos diminui de 90° , o número de reflexões nos espelhos do caleidoscópio diédrico aumenta.

Se o ângulo diedro formado pelas folhas do livro de espelhos mede aproximadamente 72° claramente é mostrado um pentágono regular

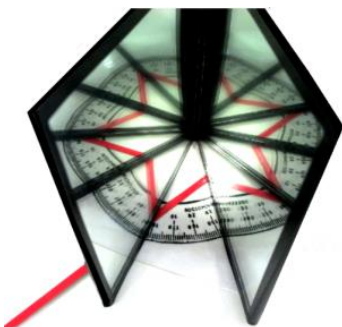


Um hexágono regular é produzido quando o ângulo diedro do livro de espelhos mede 60° .

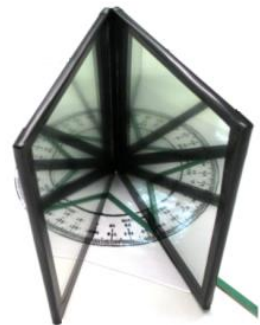
Um ângulo diedro que mede aproximadamente 45° , formado pelos folhas do livro de espelhos produz um octógono regular e a mudança de posição da tira de papel, mantendo esse mesmo ângulo diedro no livro de espelhos, obtemos uma estrela com quatro pontas.



A variação na medida do ângulo diedro formado pelo livro de espelhos e a mudança de posição da fita de papel resultam na formação de diferentes estrelas. Assim, com um ângulo diedro medindo 36° ,



resulta uma estrela com cinco pontas e um ângulo diedro medindo 30° produz uma estrela de seis pontas. Observar que as estrelas têm maior número de pontas segundo diminui a medida do ângulo diedro.



A mudança de posição das folhas do livro de espelhos e/ou da fita também produzem polígonos irregulares.



➤ *Formação de figuras planas*

Os polígonos colocados entre as folhas do livro de espelhos geram novas figuras planas e destacam as suas simetrias. É importante o desenho em papel dessas figuras que facilita a análise e a interpretação das mesmas.



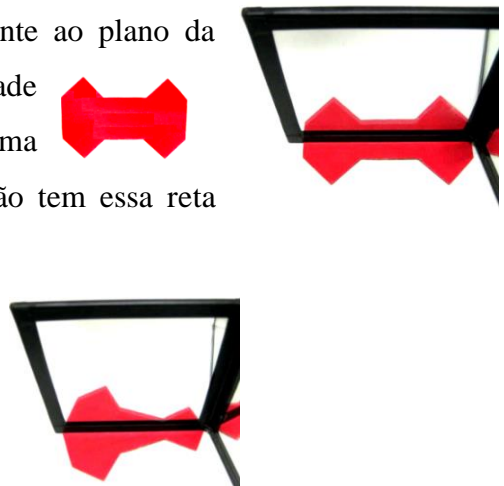
As figuras planas acima são geradas, respectivamente, pelos seguintes polígonos:



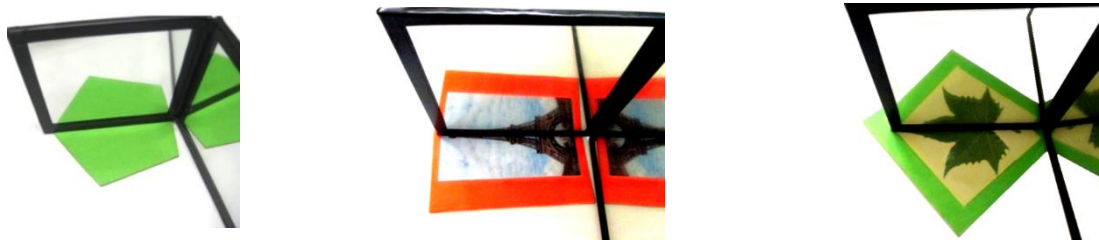
➤ *Simetria axial de figuras planas*

Os espelhos são usados para determinar se uma determinada reta é um eixo de simetria de uma figura plana: coloca-se o espelho sobre a reta verticalmente ao plano da figura, se a reta é um eixo de simetria da figura então a metade da figura juntamente com a imagem refletida reconstrói uma figura idêntica a figura inicial; caso contrário, a figura não tem essa reta como eixo de simetria.

Variando a posição do espelho com relação a figura verifica-se que outras retas não são eixos de simetria da figura. Por exemplo:



Exemplos de determinação de simetria axial de figuras planas com espelhos:



Caleidoscópio diédrico duplo

O caleidoscópio diedro duplo é formado por dois espelhos paralelos verticais à base e um terceiro espelho, também vertical à base, colocado entre os outros dois formando ângulo diedro reto com cada um desses dois espelhos.

Uma figura colocada entre os dois espelhos paralelos é refletida em um desses espelhos e a reflexão desta imagem no outro espelho produz uma segunda imagem com a orientação oposta a primeira imagem, portanto, a segunda imagem tem a mesma orientação que a figura original.

A imagem resultante de duas reflexões em espelhos paralelos é a translação da imagem original na direção perpendicular aos espelhos e a uma distância igual ao dobro da distância entre os espelhos.

Observação. *Um papel com uma grade quadrangular colocado na base da caixa de espelhos por baixo da figura original facilita a medição das distâncias entre essa figura e as imagens refletidas nos espelhos.*

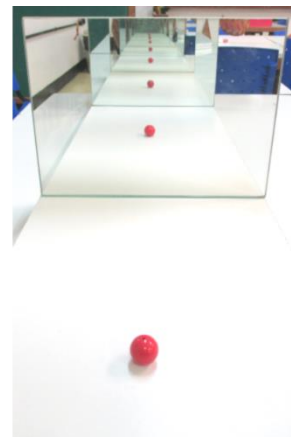
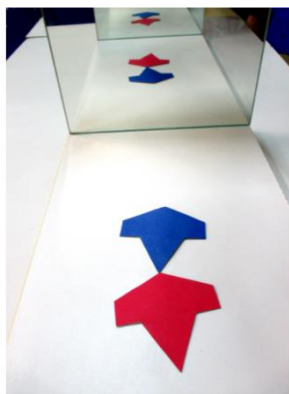


Conjunto formado por dois espelhos

Uma variante do caleidoscópio diédrico duplo é o conjunto formado por um par de espelhos paralelos fixados verticalmente sobre uma base comum de madeira.



Com este conjunto mais simples de espelhos é possível obter múltiplas imagens como as descritas acima.

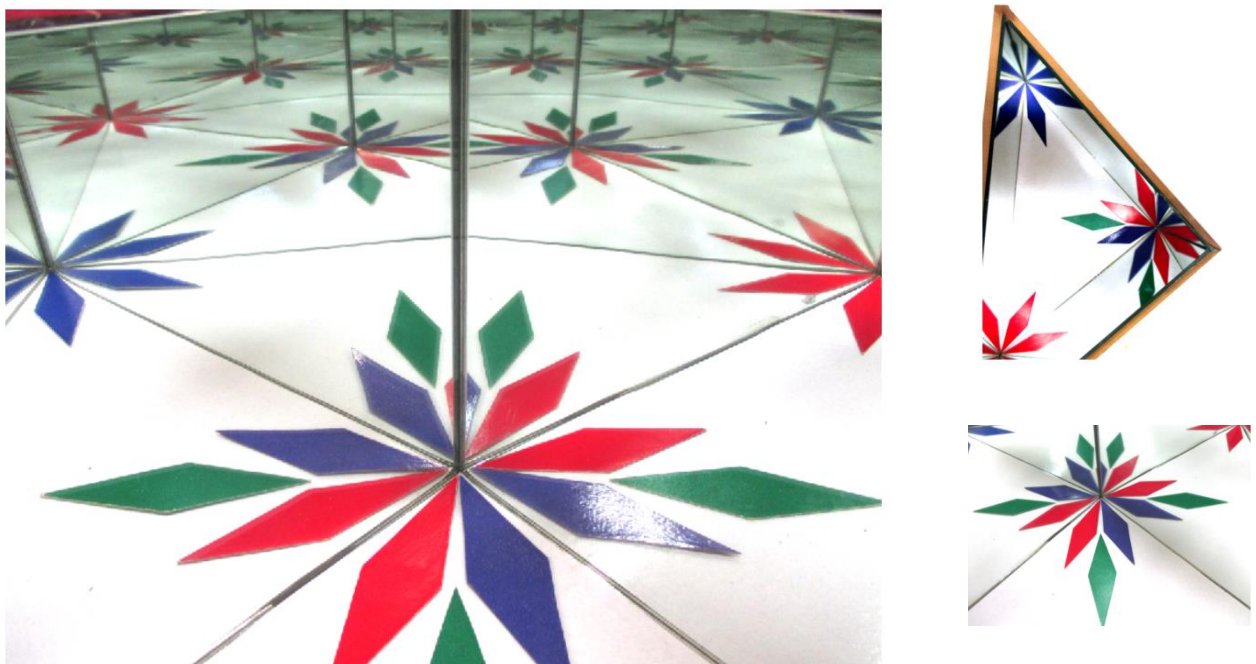


Caleidoscópio diédrico triplo ou caleidoscópio prisma com três espelhos

Este caleidoscópio é formado por três espelhos fixados perpendicularmente sobre uma madeira que é a base do caleidoscópio. A terna de espelhos forma um prisma de base triangular, isto é, cada espelho tem seus lados unidos aos lados de outros dois, assim são formadas múltiplas imagens. Os caleidoscópios prisma com três espelhos são chamados equilátero, isósceles ou escaleno segundo que seus espelhos formem respectivamente, ângulos diedros medindo: $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$; $(45^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$ ou $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$. Exemplos de caleidoscópios prisma com três espelhos:



Nestes caleidoscópios, a imagem produzida em um dos espelhos é refletida nos outros dois e assim continua sucessivamente esse processo de formação de imagens cobrindo todo o plano.

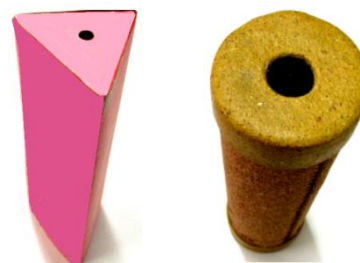


Estes caleidoscópios são adequados para o desenvolvimento de atividades e experiências escolares em pequenos grupos de alunos.

Caleidoscópio clássico ou caleidoscópio diédrico triplo individual

O caleidoscópio clássico é formado por três espelhos dispostos em forma de um prisma triangular. Cada um dos espelhos mede entre 24cm e 30cm de comprimento e aproximadamente 5 cm de largura.

As bases são duas e transparentes, entre as duas bases são colocadas miçangas de formas e cores variadas ou figuras geométricas simples. A tampa superior tem um orifício central.



Para facilitar a manipulação destes caleidoscópios o prisma de espelhos é forrado lateralmente com cartão ou com lâmina de cortiça.

Os caleidoscópios clássicos têm forma de prisma triangular equilátero, isóscele ou escaleno onde os ângulos diedros formados por suas faces medem, respectivamente, 60° , 60° , 60° ; 45° , 45° , 90° ou 30° , 60° , 90° .

Para observar as múltiplas figuras formadas por reflexão nos três espelhos do caleidoscópio clássico, coloca-se o olho no orifício da tampa e a base é orientada a uma fonte de luz, mantendo essa posição e girando lentamente o caleidoscópio é possível observar uma grande variedade de múltiplas imagens.

Caleidoscópio diédrico quadrangular com quatro espelhos

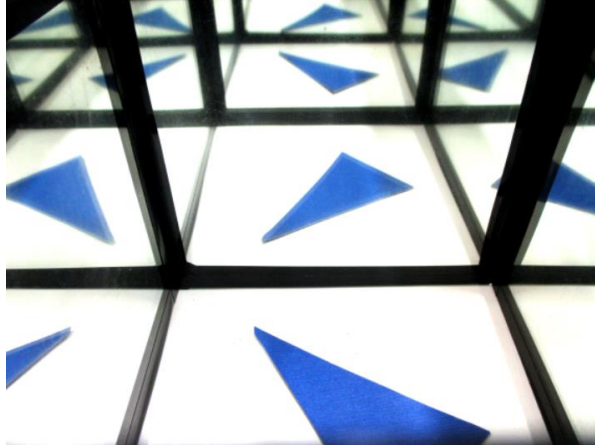
Este caleidoscópio é formado por quatro espelhos fixados verticalmente a uma base de madeira e dispostos formando um cubo sem tampa.



Também se pode formar um caleidoscópio diédrico quadrangular com dois livros de espelhos dispostos em forma de cubo.

Estes caleidoscópios são utilizados para a visualização e o estudo dos mosaicos no plano formados por polígonos.

Exemplo de múltiplas imagens no caleidoscópio diédrico com quatro espelhos formado por dois livros de espelhos.



Imagens múltiplas produzidas por um caleidoscópio diédrico com quatro espelhos.



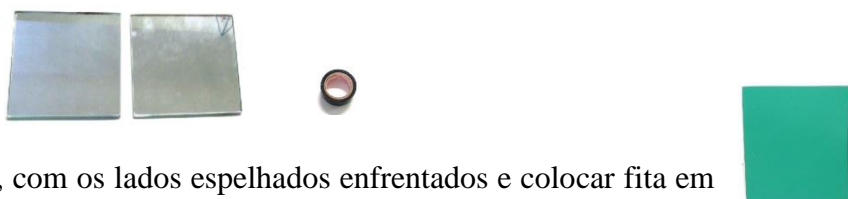
Os caleidoscópios são materiais que facilitam o tratamento dos conteúdos, o desenvolvimento de atividades e a realização de experiências.

As estratégias de trabalho aplicadas em sala de aula incluem atividades realizadas individualmente ou em pequenos grupos de alunos, experiências desenvolvidas com estes recursos manipuláveis e o compartilhamento e as discussões em grupos maiores dos resultados encontrados.

Todos os caleidoscópios apresentados podem ser construídos com material de baixo custo e acessíveis no mercado, portanto todo centro educacional pode ter sua coleção destes materiais tanto para trabalhos em pequenos grupos de alunos ou individuais.

Construção do Caleidoscópio diédrico ou Livro de espelhos

Material: *dois espelhos quadrados ou retangulares com lados medindo entre 10cm e 15cm, fita isolante e tesoura.*

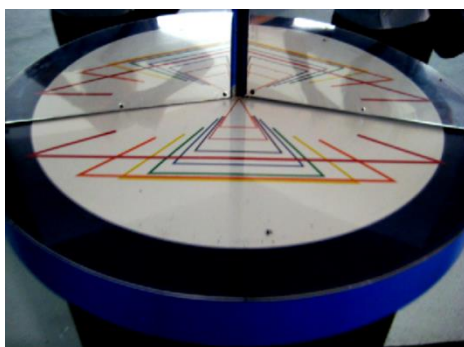


Empilhar os dois espelhos, com os lados espelhados enfrentados e colocar fita em uma das bordas laterais, a fita tem largura suficiente para segurar os dois espelhos ao mesmo tempo. Essa fita é a união central posterior do livro de espelhos. Abrir a livro de espelhos e colocar fita nas quatro bordas e no meio dos dois espelhos. Fechar o livro e passar novamente fita na parte central posterior para reforçar. A fita é importante para evitar acidentes pessoais na manipulação dos espelhos durante as atividades.



Exemplo de caleidoscópio diédrico ou livro de espelhos

Um livro de espelhos de tamanho grande é exibido no UNIVERSUM, Museu das Ciências da Universidade Nacional Autônoma de México, UNAM.



Na base do livro de espelhos da UNAM são desenhados os ângulos centrais dos polígonos regulares, Estas marcas servem de orientação para abrir o livro de espelhos segundo essas indicações para visualizar os polígonos regulares convexos.



Livro de espelhos do Museu das Ciências UNIVERSUM, na Universidade Nacional Autônoma de México, UNAM, na cidade do México.

APLICAÇÕES DIDÁTICAS DOS CALEIDOSCÓPIOS DIÉDRICOS

- Geração dos polígonos regulares convexos.
- Geração dos polígonos irregulares convexos e não convexos.
- Geração de polígonos estrelados.
- Determinação dos eixos de simetria dos polígonos.
- Propriedades de simetria dos polígonos.
- Determinação das simetrias dos polígonos regulares convexos.
- Simetrias dos polígonos irregulares.
- Construção de figuras planas.
- Comparação de figuras planas.
- Simetrias das regiões poligonais.
- Simetrias das figuras planas.
- Construção de desenhos de figuras simétricas mediante múltiplas imagens.
- Visualização da translação de figuras planas.
- Visualização da rotação de figuras planas.
- Reprodução de diferentes tipos de simetrias planas.
- Análise das isometrias envolvidas na construção da peça básica de frisos ou de mosaicos.
- Construção de frisos.
- Simetrias em frisos.
- Isometrias na construção de mosaicos.
- Simetrias em mosaicos.