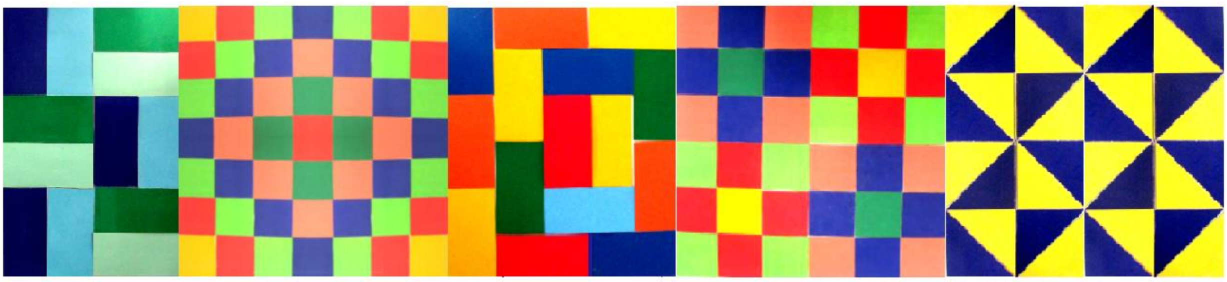
MOSAICOS



Descrição

__Mosaico__ ou *__tesselação__* ou *__recobrimento do plano__* é um padrão de figuras planas que cobre inteiramente o plano sem superposições das figuras nem espaços vazios entre elas. Dizemos que as peças ou tesselas cobrem ou pavimentam o plano e que o padrão resultante é uma tesselação, mosaico, ladrilhamento ou pavimentação do plano. Também existem tesselações de partes de um plano ou de outras superfícies

Os mosaicos foram usados desde a antiguidade em pisos e recobrimentos de paredes e como padrões para tapetes, móveis, tapeçarias, tecelagem, vestuário e outros objetos. As tesselações estão presentes ao longo da história desde a arquitetura antiga até a arte moderna em diferentes culturas.

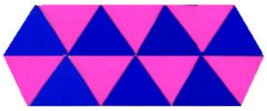
No livro “Harmonices Mundi”, publicado em 1969, o astrônomo Johannes Kepler fez o primeiro tratamento matemático das tesselações escrevendo sobre os mosaicos regulares, os mosaicos semirregulares e também sobre mosaicos que incluem pentágonos na sua formação.

As formas das peças dos ladrilhamentos do plano podem ser infinitamente variadas então é imperativo impor restrições sobre essas formas para o tratamento do tema. O nosso objetivo é a abordagem e a classificação dos mosaicos formados por regiões poligonais as quais, para facilitar a linguagem, chamamos simplesmente de polígonos. Não existe um procedimento geral ou um algoritmo que permita afirmar se um polígono dado forma mosaico. Todo polígono é uma tessela ou uma peça de alguma tesselação do plano.

Um *mosaico* M é a união das regiões poligonais de um conjunto $\{P_1,\ P_2,\ ...\}$, tais que os conjuntos interiores dessas regiões poligonais são disjuntos e não existem lacunas entre elas. Os polígonos P_i, com $i = 1,2, ...$, são as tesselas ou as peças do mosaico. Os elementos de um mosaico são os polígonos, os vértices e os lados que são os polígonos que o formam e os vértices e os lados dessas figuras.

Um mosaico *unicelular* é formado por cópias congruentes de uma mesma figura plana, chamada célula.

Um *mosaico* ou *tesselação lado a lado* do plano é um conjunto $\{P_1, P_2, ...\}$ de polígonos tais que:



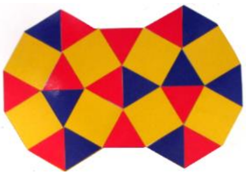
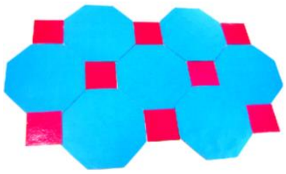
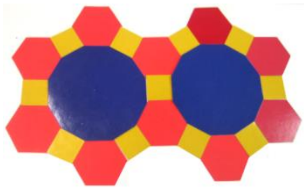
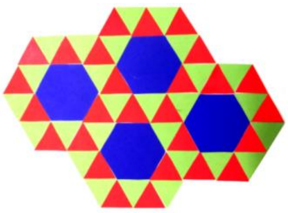
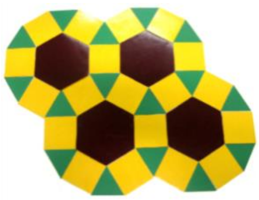
- dois polígonos do conjunto se interceptam em um lado ou em um vértice ou tem intersecção vazia;
- cada lado de um polígono do conjunto é também lado de exatamente mais um polígono do conjunto.

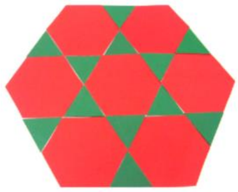
Um *mosaico regular* é uma tesselação unicelular lado a lado, cuja célula é um polígono regular. Na tesselação regular em cada vértice concorre o mesmo número de polígonos congruentes. A soma dos ângulos internos dos polígonos em torno de um vértice é igual a quatro retos; logo, resulta que o mínimo de três e o máximo de seis polígonos regulares convexos congruentes concorrem em cada vértice. Portanto, existem somente três mosaicos regulares, eles são formados pelos polígonos regulares convexos: triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular.



Com triângulos equiláteros e com quadrados é possível formar diferentes padrões e combinações de cores para mosaicos lado com lado, mas para os hexágonos regulares convexos somente existe uma única possível combinação podendo mudar apenas as cores.

Os *mosaicos semirregulares* ou *mosaicos Arquimedianos* são tesselações do plano lado a lado formadas por cópias congruentes de dois ou mais tipos de polígonos regulares convexos com lados congruentes e tais que em cada vértice concorre o mesmo número de polígonos e na mesma ordem. Logo, no mosaico semirregular todos os vértices têm a mesma configuração. Os mosaicos semirregulares são oito.

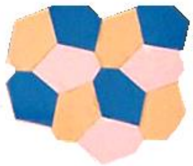









Na construção de mosaicos é importante observar a medida dos ângulos das figuras que concorrem em um vértice, pois a soma dessas medidas deve ser igual a 360º. Esta condição é necessária mas não é suficiente; podemos ter um arranjo válido em torno de um vértice e não é possível expandi-lo a todo o plano; logo, um arranjo pode ser numericamente possível, mas deve ser confirmado pela experimentação de que ele é geometricamente possível. Assim, chegamos a conclusão que não existem mosaicos regulares formados por polígonos com sete ou mais lados e não existem mosaicos semirregulares formados por polígonos com mais de doze lados; ademais, os polígonos regulares convexos com cinco, sete, nove, dez e onze lados não fazem parte das tesselações semirregulares.

Uma tesselação unicelular lado a lado formada por polígonos irregulares é um *mosaico irregular*. Formam uma tesselacão unicelular lado a lado do plano:

- todos os triângulos;
- todos os quadriláteros, convexos ou não convexos.



Karl Reinhardt demonstrou em sua tese doutoral, em 1918, que somente existem três hexágonos irregulares convexos que formam tesselação irregular e em 1927, provou que os polígonos convexos com mais de seis lados não formam uma pavimentação do plano. Reinhardt também descreveu cinco tipos de pentágonos convexos que formam um mosaico irregular; posteriormente foram achados mais nove tipos de pentágonos convexos que formam tesselações e não foi provado ainda que esses são os únicos pentágonos convexos que formam mosaicos irregulares.

Existem tesselações irregulares unicelulares formadas por polígonos não convexos, inclusive com polígonos com mais de seis lados, e formadas por combinações de polígonos regulares convexos e polígonos irregulares convexos, de polígonos regulares convexos e polígonos não convexos, de polígonos convexos e polígonos regulares não convexos; também há tesselações formadas por polígonos regulares convexos do mesmo tipo e de vários tamanhos diferentes.

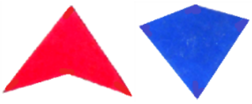
Todas as tesselações abordadas acima admitem translações em duas direções não paralelas distintas e a uma determinada distância (não exatamente a mesma) em cada direção, e como resultado dessas transformações elas se superpõem com o mosaico original, então dizemos que são *mosaicos periódicos*.

Em toda tesselação periódica é possível identificar uma *região fundamental*, que pode ser uma peça ou um bloco de peças, com a qual se cobre todo o plano mediante translações a intervalos regulares. Existe infinita variedade de possíveis desenhos para a região fundamental de uma tesselação do plano, mas existe um número finito de possibilidades para a colocação das cópias iguais dessa região fundamental em todo o plano de forma simétrica.

O cristalógrafo russo Evgraf S. Fedorov mostrou, em 1891, que existem somente dezessete estruturas básicas para as infinitas possibilidades de tesselações periódicas do plano; eles são os dezessete *padrões de papel de parede*. No palácio La Alhambra, em Granada, Espanha, estão representados os dezessete modelos de papel de parede. Este edifício é profusamente decorado com entalhados em pedra e em madeira em portas, janelas e tetos, com estuques em paredes, colunas e tetos e com mosaicos em paredes, pisos e tetos.

Uma *tesselação não periódica* é um mosaico no qual não existe repetição regular do padrão por translação.

O físico inglês Roger Penrose achou vários conjuntos de tesselas que formam mosaicos não periódicos. Em 1975, Penrose exibiu um conjunto formado por dois polígonos que juntamente formam uma tesselação não periódica do plano; esses polígonos são chamados de dardo e pipa e as duas peças resultam de cortar um losango ou rombo com ângulos internos medindo 72º e 108º. O padrão de mosaico não periódico formado por dardo e pipa é conhecido por Mosaico de Penrose.



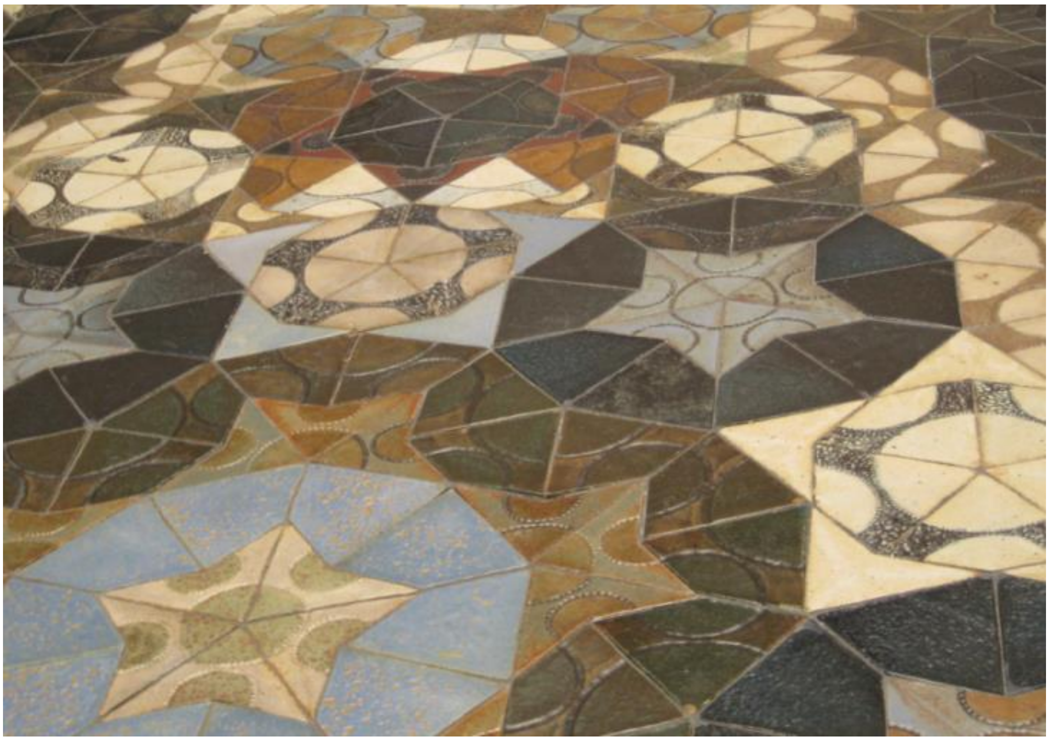
dardo pipa

Cada uma das peças de Penrose separadamente forma uma tesselação periódica e desde que juntas formam um losango, quadrilátero que forma mosaico periódico, então a combinação dessas peças para a formação de um mosaico não periódico exclui a possibilidade do arranjo rômbico. Uma regra para formar o mosaico de Penrose consiste em colocar pontos de duas cores diferentes nos vértices dos dardos e das pipas com a convenção que somente podem coincidir vértices da mesma cor. O matemático John Horton Conway propôs como estratégia para a construção do mosaico de Penrose pintar arcos circulares de cores diferentes nas peças; a união dos lados somente é permitida se resulta na união de arcos da mesma cor.

Os padrões de mosaicos de Penrose cobrem o plano em uma infinidade não enumerável de maneiras não periódicas; logo, existe uma infinidade de mosaicos não periódicos formados com dardos e pipas. Penrose e Conway provaram que uma característica dos mosaicos de Penrose é que quando uma curva se fecha a região interior tem simetria rotacional de ordem cinco. Assim, quando o padrão de dardos e pipas se expande para cobrir todo o plano aparecem certas regiões arbitrariamente grandes com simetria rotacional de ordem cinco.

Os seguintes padrões formados com uma estrela e com um decágono no centro são chamados, respectivamente padrão de Estrela infinita e padrão de Sol Infinito.

Observar que existem partes de estes dois padrões que são similares. Todo mosaico de Penrose tem a propriedade que qualquer região finita da tesselação aparece uma infinidade de vezes em qualquer outra tesselação. Isto significa que analisando uma porção de um mosaico de Penrose resulta difícil afirmar a qual dos padrões ele corresponde.



Mosaico de Penrose exibido no Museu das Ciências UNIVERSUM, na Universidade Nacional Autônoma de México, UNAM, na cidade do México

O artista holandês Martus Cornelius Escher fez maravilhosas e surpreendentes realizações em tesselações onde modificou os bordes dos polígonos para fazer figuras humanas e de animais que se entrelaçam e cobrem o plano. A partir de um mosaico simples formado por polígonos convexos ele realizou uma intensa transformação de maneira sistemática e engenhosa até conseguir um modelo repetitivo de alguma figura plausível de ser reconhecida. É interessante o estudo das isometrias do plano aplicadas na formação da região fundamental dos mosaicos de Escher.

Metamorfosis II, obra de M C Escher

As atividades com tesselações do plano em sala de aula que incluem a manipulação de recursos didáticos têm papel importante no ensino fundamentado em atividades de observação, de exploração, de investigação, de resolução de problemas e favorecem a visualização dos conceitos e estimulam o desenvolvimento da intuição geométrica.

Os polígonos, feitos com cartão, madeira, plástico, espuma vinílica acetinada ou E.V.A., são ferramentas úteis para gerar tesselações do plano e para verificar conjeturas, descrever representações e aplicações. As construções de mosaicos incluem a aplicação e a verificação de conceitos tais como as propriedades geométricas das regiões poligonais, as isometrias no plano e as simetrias das figuras planas. O tema tem características dinâmicas, lúdicas, estéticas e importantes aplicações interdisciplinares por sua relação com arte, arquitetura, decoração, apreciações da natureza e de situações do cotidiano.

O trabalho em pequenos grupos de alunos requer uma quantidade adequada de polígonos para facilitar o desenvolvimento de experiências, de atividades de construção e a resolução de problemas relacionados ao estudo dos mosaicos no plano.

Mosaicos nas paredes do palácio La Alhambra em Granada, Espanha.

APLICAÇÕES DIDÁTICAS DOS MOSAICOS

- Identificação dos polígonos e de seus elementos.
- Comparação dos polígonos.
- Classificação dos polígonos pelos seus lados.
- Congruência e/ou paralelismo dos lados.
- Classificação dos polígonos pela sua convexidade.
- Propriedades dos polígonos.
- Estudo dos polígonos pela sua propriedade de gerar mosaicos.
- Associação de polígonos pelas suas propriedades.
- Construção de figuras planas.
- Comparação de figuras planas.
- Congruência de figuras planas.
- Equicomposição de polígonos.
- Estudo de polígonos gerados por peças de mosaicos.
- Estudo dos ângulos presentes nos mosaicos.
- Geração de novos mosaicos e estudo das suas propriedades.
- Estudo dos polígonos que não geram mosaicos unicelulares.
- Simetrias dos mosaicos.
- Geração de mosaicos por linhas formadas por um mesmo friso repetido.