Prova 1 (Resolução) **IAL Turma 6** **24/04/2024**

1. (2 pontos) Resolva os sistemas

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ -x+y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=1 \end{cases}$$

Primeiro sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III+I}]{\text{II−I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III+II}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}/2]{\text{II}/(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A segunda e a terceira equação nos dizem que $y=1$ e $z=1$. Substituindo na primeira equação, $x+1+1=2$ assim $x=0$.

A única solução é $(x,y,z)=(0,1,1)$.

Segundo sistema.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II−I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}/2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

As variáveis líderes são x_1, x_2. As variáveis livres são x_3, x_4. Escolhendo parâmetros $x_3=t$, $x_4=s$ obtemos $x_2=x_3=t$ e $x_1-x_2+x_3-x_4=1$, assim substituindo $x_1=t-t+s+1=s+1$. Escrever isso é suficiente para responder à questão.

As soluções do sistema são dadas pelas 4-uplas

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(s+1,t,t,s)=(1,0,0,0)+t(0,1,1,0)+s(1,0,0,1)$$

ao variar de $t,s\in\mathbb{R}$.

2. (2 pontos) Calcule o determinante de

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primeiro determinante. Podemos aplicar a regra de Sarrus, obtendo

$$\det(A_1)=1+0+0-0-(-1)-3=1+1-3=-1.$$

Segundo determinante. Podemos fazer a operação elementar $\mathrm{II} - \mathrm{I}/2$, depois aplicar Laplace à segunda linha e em seguida aplicar a regra de Sarrus, obtendo

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (2-6) = 4.$$

3. (3 pontos) Encontre a inversa (se existir) de

$$B_1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_3 := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz B_1. Pela regra de Sarrus,

$$\det(B_1) = 2 + 1 + 0 - 2 - 1 - 0 = 0$$

assim B_1 não admite inversa.

No caso de B_2 e B_3, aplicaremos o algoritmo de inversão.

Matriz B_2.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{IV}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\mathrm{IV}]{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right). \qquad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matriz B_3.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-4\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}/(-2)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 \end{array}\right). \qquad B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. (1 ponto) Calcule $A_1 \cdot B_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. (1 ponto) A matriz $A_1 + B_1$ é inversível?

$$A_1 + B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

O seu determinante, pela regra de Sarrus, é

$$\det(A_1 + B_1) = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 12 + 4 + 0 - 4 - 0 - 18 = -6.$$

Como $\det(A_1 + B_1) = -6 \neq 0$, segue que $A_1 + B_1$ é inversível.

6. (1 ponto) Lembre-se que a soma de matrizes e a multiplicação entre um escalar e uma matriz são definidas por componentes. Se X é uma matriz quadrada, seja $X^2 = X \cdot X$. Se A, B são duas matrizes quadradas 2×2, é sempre verdade que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Se sim, demonstre. Se não, dê um contra-exemplo.

A resposta é não. Observe que

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2,$$

assim a igualdade $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ vale apenas no caso em que $AB + BA = 2AB$, ou seja (subtraindo BA aos dois lados) $AB = BA$. Em outras palavras, para achar um contra-exemplo é suficiente encontrar duas matrizes A, B de tamanho 2×2 tais que $AB \neq BA$. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e como $A^2 = 0$ e $B^2 = 0$, temos

$$A^2 + 2AB + B^2 = 2AB = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$