Terceira prova **IAL Turma 6** **01/07/2024**

Nome e matrícula: ....

Justificar todas as respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas.

Cada item vale um ponto.

1. (3 pontos) Considere a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ 3x+2y+z \end{pmatrix}.$$

   (a) Encontre uma matriz A de formato 3×3 tal que $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

   (b) O vetor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ é autovetor de A?

   (c) Diga se T é injetiva, sobrejetiva, bijetiva.

2. (1 ponto) Considere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

   Diga se f é injetiva, sobrejetiva, bijetiva.

3. (4 pontos) Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que o polinômio característico de B é

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathbb{1}_3) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda.$$

   (b) Calcule os autovalores de B.

   (c) Mostre que B é diagonalizável e encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}BP = D$.

   (d) Calcule B^{21}.

4. (2 pontos) Para cada uma das seguintes matrizes, diga se é diagonalizável.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. (1 ponto bonus) Mostre que se uma matriz S é diagonalizável, então a matriz $S^3 = S \cdot S \cdot S$ é diagonalizável também. [Observe que se D é diagonal, D^3 é diagonal.]