P2 **IAL Turma 6** **29/05/2024** **Resolução**

Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcule $2v_1 - v_2 + v_3 + 3v_4$.

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calcule $\dim([v_1, v_2, v_3, v_4])$.

A dimensão de $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ é o posto da matriz cujas colunas são v_1, v_2, v_3, v_4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O posto é igual ao número de elementos líderes, ou seja 2. Segue que $\dim([v_1, v_2, v_3, v_4]) = 2$.

3. Sejam $V = [v_1, v_2]$, $W = [v_3, v_4]$. Diga se $V = W$.

Observe que V e W são dois planos contidos em $U = [v_1, v_2, v_3, v_4]$. Como $\dim(U) = 2$ (pelo item anterior), U é um plano, logo $V = U = W$.

4. O vetor $v_1 - v_2$ é ortogonal ao vetor $2v_2 + 3v_5$?

$$(v_1 - v_2) \cdot (2v_2 + 3v_5) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0.$$

Segue que $v_1 - v_2$ é ortogonal a $2v_2 + 3v_5$.

5. Seja $V = [v_1, v_2] < \mathbb{R}^3$. Determine uma base de $V^\perp$.

O espaço ortogonal $V^\perp$ é definido por $x + 2y + z = 0$ e $x + 3y = 0$, assim $x = -3y$ e $z = y$. Escolhendo $t = y$ obtemos que os vetores de $V^\perp$ têm a forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue que uma base de $V^\perp$ é $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\dim(V^\perp) = 1$.

6. Os vetores v_1, v_2, v_5 são linearmente independentes?

   Como se trata de três vetores de $\mathbb{R}^3$, v_1, v_2, v_5 são linearmente independentes se e somente se o determinante da matriz B cujas colunas são v_1, v_2, v_5 é diferente de zero. Temos

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$$

   Segue que v_1, v_2, v_5 são linearmente independentes.

7. Calcule a projeção ortogonal de v_2 sobre $[v_1, v_5]$.

   Seja A a matriz cujas colunas são v_1 e v_5, ou seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   A projeção ortogonal de v_2 sobre $[v_1, v_3]$ é igual a $p = A(A^TA)^{-1}A^Tv_2$. Temos

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$p = A(A^TA)^{-1}A^Tv_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(7v_1 - 4v_5).$$

   Faz sentido, pois $v_2 - p = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ é ortogonal a v_1 e a v_5.

8. Encontre uma base ortogonal de $[v_1, v_2]$.

   O primeiro vetor da base ortogonal é $u_1 = v_1$, o segundo é

$$u_2 = v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 2/3 \\ -7/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

9. Determine $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 v_1 + a_2 v_2 = v_3$.

   Precisamos resolver a equação vetorial

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

   Temos $a_1 + a_2 = -1$, $2a_1 + 3a_2 = 4$, $a_1 = -7$. Segue que $a_2 = -1 - a_1 = -1 + 7 = 6$ e $-7v_1 + 6v_2 = v_3$.

10. Se X e Y são duas matrizes 2×2, é verdade que o posto de $X + Y$ é igual à soma dos postos de X e de Y? Se a resposta é sim, demonstre. Se a resposta é não, dê um contra-exemplo.

    Não, por exemplo sejam $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Então X e Y têm posto 1 e $X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ também tem posto 1.