66. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

67. $a_n = \left(\frac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n}, \quad x > 0$

68. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

69. $a_n = \frac{3^n \cdot 6^n}{2^{-n} \cdot n!}$

70. $a_n = \frac{(10/11)^n}{(9/10)^n + (11/12)^n}$

71. $a_n = \operatorname{tgh} n$

72. $a_n = \operatorname{senh}(\ln n)$

73. $a_n = \frac{n^2}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

74. $a_n = n\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

75. $a_n = \operatorname{tg}^{-1} n$

76. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^{-1} n$

77. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{2^n}}$

78. $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

79. $a_n = \frac{(\ln n)^{200}}{n}$

80. $a_n = \frac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$

81. $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

82. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + n}}$

83. $a_n = \frac{1}{n}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$

84. $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx, \quad p > 1$

Teoria e exemplos

85. O primeiro termo de uma seqüência é $x_1 = 1$. Cada um dos termos seguintes é a soma de todos os seus antecedentes:

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Escreva os primeiros termos até que seja capaz de deduzir uma fórmula geral para x_n que seja verdadeira para $n \geq 2$.

86. Uma seqüência de números racionais é descrita a seguir:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}, \ldots$$

Aqui os numeradores formam uma seqüência, os denominadores formam uma segunda seqüência e suas razões formam uma terceira seqüência. Sejam x_n e y_n, respectivamente, o numerador e o denominador da n-ésima fração $r_n = x_n / y_n$.

(a) Prove que $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$, $x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ e, mais genericamente, que se $a^2 - 2b^2 = -1$ ou $+1$, então

$$(a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = +1 \text{ ou } -1$$

respectivamente.

(b) As frações $r_n = x_n/y_n$ se aproximam de um limite à medida que n aumenta. Qual é esse limite? (*Sugestão*: Use o item (a) para mostrar que $r_n^2 - 2 = \pm(1/y_n)^2$ e que y_n não é menor que n).

87. **Método de Newton** As seqüências a seguir vêm da fórmula recursiva para o método de Newton.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

As seqüências convergem? Em caso afirmativo, para qual valor? Em cada caso, comece identificando a função f que gera a seqüência.

(a) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$

(b) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{\operatorname{tg} x_n - 1}{\sec^2 x_n}$

(c) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$

88. (a) Suponha que $f(x)$ seja derivável para todo x em $[0, 1]$ e que $f(0) = 0$. Defina a seqüência $\{a_n\}$ pela regra $a_n = nf(1/n)$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$.

Use o resultado do item (a) para encontrar os limites das seqüências $\{a_n\}$ a seguir.

(b) $a_n = n \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{n}$

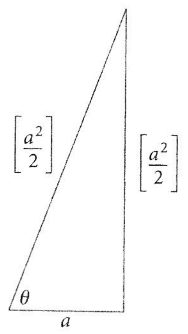
(c) $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

(d) $a_n = n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

89. **Ternas pitagóricas** Uma terna de inteiros positivos a, b e c é chamada **terna pitagórica** se $a^2 + b^2 = c^2$. Seja a um inteiro positivo ímpar e sejam

$$b = \left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor \quad \text{e} \quad c = \left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil$$

respectivamente, o maior inteiro contido e o maior inteiro contendo $a^2/2$. (O piso inteiro e o teto inteiro de $a^2/2$.)



(a) Mostre que $a^2 + b^2 = c^2$. (*Sugestão*: Considere que $a = 2n + 1$ e expresse b e c em termos de n.)

(b) Por cálculo direto ou utilizando a figura, encontre

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil}$$