90. A raiz n-ésima de n!

(a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} (2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ e, portanto, usando a aproximação de Stirling (Capítulo 8, Volume I, Exercício adicional 50, item (a)), que

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \quad \text{para valores grandes de } n.$$

T (b) Teste a aproximação no item (a) para $n = 40, 50, 60, \ldots$, até onde sua calculadora permitir.

91. (a) Presumindo que $\lim_{n\to\infty} (1/n^c) = 0$ se c for qualquer constante positiva, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$$

se c for qualquer constante positiva.

(b) Prove que $\lim_{n\to\infty} (1/n^c) = 0$ se c for qualquer constante positiva. (*Sugestão*: Se $\epsilon = 0{,}001$ e $c = 0{,}04$, de quanto deve ser N para assegurar que $|1/n^c - 0| < \epsilon$ se $n > N$?)

92. O teorema da seqüência intercalada Prove o teorema da seqüência intercalada para seqüências: se tanto $\{a_n\}$ quanto $\{b_n\}$ convergem para L, então a seqüência

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \ldots$$

converge para L.

93. Prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

94. Prove que $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1, (x > 0)$.

95. Prove o Teorema 2. **96.** Prove o Teorema 3.

Nos exercícios 97–100, determine se a seqüência é crescente e se possui um limitante superior.

97. $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

98. $a_n = \dfrac{(2n+3)!}{(n+1)!}$ $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

99. $a_n = \dfrac{2^n 3^n}{n!}$

100. $a_n = 2 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}$

$a_{n+1} - a_n$

Quais das seqüências nos exercícios 101–106 convergem? Quais divergem? Justifique as suas respostas.

101. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

102. $a_n = n - \dfrac{1}{n}$

103. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

104. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n}$

105. $a_n = ((-1)^n + 1)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

106. O primeiro termo de uma seqüência é $x_1 = \cos(1)$. Os termos seguintes são $x_2 = x_1$ ou $\cos(2)$, o que for maior; e $x_3 = x_2$ ou $\cos(3)$, o que for maior (mais à direita). Em geral,

$$x_{n+1} = \max\{x_n, \cos(n+1)\}$$

107. Seqüências decrescentes Uma seqüência de números $\{a_n\}$ na qual $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n é chamada **seqüência decrescente.** Uma seqüência $\{a_n\}$ é **limitada inferiormente** se existe um número M tal que $M \leq a_n$ para todo n. O número M é um **limitante inferior** para a seqüência. A partir do Teorema 6, prove que uma seqüência decrescente limitada inferiormente converge e que uma seqüência decrescente que não é limitada inferiormente diverge.

(Continuação do Exercício 107) Utilizando a conclusão do Exercício 107, determine quais das seqüências nos exercícios 108–112 convergem e quais divergem.

108. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

109. $a_n = \dfrac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$

110. $a_n = \dfrac{1-4^n}{2^n}$

111. $a_n = \dfrac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$

112. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$

113. A seqüência $\{n/(n+1)\}$ tem menor limitante superior igual a 1 Mostre que se M é um número menor que 1, então os termos de $\{n/(n+1)\}$ podem acabar excedendo o valor de M. Portanto, se $M < 1$ existe um inteiro N tal que $n/(n+1) > M$ para todo $n > N$. Como $n/(n+1) < 1$ para todo n, isso prova que 1 é o menor limitante superior para $\{n/(n+1)\}$.

114. Unicidade dos menores limitantes superiores Prove que se M_1 e M_2 são os menores limitantes superiores para a seqüência $\{a_n\}$, então $M_1 = M_2$. Sendo assim, uma seqüência não pode ter dois limitantes superiores diferentes.

115. É verdade que uma seqüência $\{a_n\}$ de números positivos limitada superiormente deve convergir? Justifique sua resposta.

116. Prove que, se $\{a_n\}$ é uma seqüência convergente, então para cada número positivo ϵ corresponde um inteiro N tal que para todo m e n

$$m > N \quad e \quad n > N \quad \Rightarrow \quad |a_m - a_n| < \epsilon.$$

117. Unicidade de limites Prove que limites de seqüências são únicos. Ou seja, mostre que, se L_1 e L_2 forem números tais que $a_n \to L_1$ e $a_n \to L_2$, então $L_1 = L_2$.

118. Limites e subseqüências Se os termos de uma seqüência aparecem em outra seqüência na ordem dada, chamamos a primeira seqüência de **subseqüência** da segunda. Prove que, se duas subseqüências de uma seqüência $\{a_n\}$ possuem limites diferentes $L_1 \neq L_2$, então $\{a_n\}$ divergirá.

119. Para uma seqüência $\{a_n\}$, os termos de índices pares são denotados como a_{2k} e os termos de índices ímpares, como a_{2k+1}. Prove que, se $a_{2k} \to L$ e $a_{2k+1} \to L$, então $a_n \to L$.

120. Prove que uma seqüência $\{a_n\}$ converge para 0 se e somente se a seqüência de valores absolutos $\{|a_n|\}$ converge para 0.