e $$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}$$

Reindexação

Companion Website
Biografia histórica
Richard Dedekind (1831–1916)

Uma vez que preservemos a ordem de seus termos, podemos reindexar qualquer série sem alterar sua convergência. Para aumentar o valor inicial do índice em h unidades, substitua o n na fórmula para a_n por $n - h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Para diminuir o valor inicial do índice em h unidades, substitua o n na fórmula para a_n por $n + h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Isso funciona como um deslocamento horizontal. Vimos isso acontecer quando iniciamos uma série geométrica com o índice $n = 0$, em vez do índice $n = 1$, mas podemos usar qualquer outro valor inicial como índice. Geralmente damos preferência às indexações que levam a expressões simples.

EXEMPLO 10 Reindexando uma série geométrica

Podemos escrever a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \text{ ou até mesmo } \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$$

As somas parciais permanecem as mesmas, não importando qual indexação escolhamos.

Exercícios 11.2

Encontrando as n-ésimas somas parciais

Nos exercícios 1–6, encontre uma fórmula para a n-ésima soma parcial de cada série e use-a para encontrar a soma da série se ela convergir.

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$
2. $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \cdots + \frac{9}{100^n} + \cdots$
3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$
4. $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + (-1)^{n-1}2^{n-1} + \cdots$
5. $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$
6. $\frac{5}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{5}{n(n+1)} + \cdots$

Séries com termos geométricos

Nos exercícios 7–14, escreva os primeiros termos de cada série para mostrar como a série começa. Então, calcule sua soma.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$