Se $p = 1$, temos a série harmônica (divergente)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Temos convergência para $p > 1$, mas divergência para todos os outros valores de $p$.

A $p$-série com $p = 1$ é a **série harmônica** (Exemplo 1). O teste da $p$-série mostra que a série harmônica é divergente *por um triz*; se aumentamos $p$ para 1,000000001, por exemplo, a série converge!

A lentidão com a qual as somas parciais da série harmônica se aproximam do infinito é muito impressionante. Seriam necessários, por exemplo, 178.482.301 termos da série harmônica para mover a soma parcial além de 20. Várias semanas seriam necessárias para calcular uma soma com tantos termos na calculadora. (Veja também o Exercício 33b.)

**EXEMPLO 4** Uma série convergente

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

converge pelo teste da integral. A função $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ é positiva, contínua e decrescente para $x \geq 1$ e

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} [\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Novamente, ressaltamos que $\pi/4$ *não* é a soma da série. A série converge, mas não sabemos o valor de sua soma.

A convergência da soma no Exemplo 4 também pode ser vista por meio da comparação com a série $\Sigma 1/n^2$. Os testes de comparação são estudados na próxima seção.

# Exercícios 11.3

## Determinando a convergência ou a divergência

Quais das séries nos exercícios 1–30 convergem e quais divergem? Justifique suas respostas. (Quando estiver checando suas respostas, lembre-se de que pode existir mais de uma maneira de determinar a convergência ou a divergência de uma série.)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n}$
9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n + 3}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$
17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$
21. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1/n)}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n - 1}}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \ln^2 n)}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$