25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1 + e^{2n}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 + e^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \operatorname{tg}^{-1} n}{1 + n^2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$

Teoria e exemplos

Para quais valores de a as séries nos exercícios 31 e 32 convergem (se é que isso acontece)?

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4} \right)$

32. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2a}{n+1} \right)$

33. (a) Esboce gráficos como os das figuras 11.7 e 11.8 para mostrar que as somas parciais das séries harmônicas satisfazem as desigualdades

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n$$

T (b) Ainda que saibamos que ela diverge, não existe evidência empírica para a divergência da série harmônica. As somas parciais simplesmente aumentam muito lentamente. Para compreender o que estamos dizendo, imagine que tenha começado com $s_1 = 1$ no dia em que o universo foi criado, há 13 bilhões de anos, e adicionou um novo termo a cada *segundo*. Considerando-se que um ano tem 365 dias, aproximadamente quanto seria a soma s_n hoje em dia?

34. Existe algum valor de x para o qual $\sum_{n=1}^{\infty} (1/(nx))$ converge? Justifique a sua resposta.

35. É verdade que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série divergente de números positivos também existe uma série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de números positivos com $b_n < a_n$ para todo valor de n? Existe uma "menor" série divergente de números positivos? Justifique sua resposta.

36. (*Continuação do Exercício 35.*) Existe uma "maior" série convergente de números positivos? Explique.

37. **Teste da condensação de Cauchy** O teste da condensação de Cauchy diz: Seja $\{a_n\}$ uma seqüência decrescente ($a_n \ge a_{n+1}$ para todo n) de termos positivos que converge para 0. Então, $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum 2^n a_{2^n}$ converge. Por exemplo, $\sum (1/n)$ diverge porque $\sum 2^n \cdot (1/2^n) = \sum 1$ diverge. Mostre por que esse teste funciona.

38. Use o teste da condensação de Cauchy do Exercício 37 para mostrar que

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \le 1$

39. ***p*-série logarítmica**

(a) Mostre que

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad \text{(sendo } p \text{ uma constante positiva)}$$

converge se e somente se $p > 1$.

(b) Que implicações o fato do item (a) tem sobre a convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}\ ?$$

Justifique a sua resposta.

40. (*Continuação do Exercício 39.*) Use o resultado do Exercício 39 para determinar quais das séries a seguir convergem e quais divergem. Justifique a sua resposta em cada caso.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1,01}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^3)}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

41. **Constante de Euler** Gráficos como aqueles na Figura 11.8 sugerem que, quando n aumenta, existe pouca mudança na diferença entre a soma

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

e a integral

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

Para explorar essa idéia, siga os passos indicados.

(a) Tomando $f(x) = 1/x$ na prova do Teorema 9, mostre que

$$\ln(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \ln n$$

ou

$$0 < \ln(n+1) - \ln n \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \le 1$$

Portanto, a seqüência

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

é limitada inferior e superiormente.

(b) Mostre que

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1) - \ln n$$

e use esse resultado para mostrar que a seqüência $\{a_n\}$ no item (a) é decrescente.