Como uma seqüência decrescente limitada inferiormente converge (Exercício 107 da Seção 11.1), os números a_n definidos no item (a) convergem:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow \gamma$$

O número γ, cujo valor é 0,5772. . ., é chamado *constante de Euler*. Diferentemente do que ocorre com outros números especiais como π e e, nenhuma outra expressão com uma lei de formulação simples jamais foi encontrada para γ.

42. Use o teste da integral para mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

converge.

11.4 Testes de comparação

Companion Website
Biografia histórica
Alberto da Saxônia
(1316–1390)

Vimos como determinar a convergência de séries geométricas, p-séries, e de algumas outras séries. Podemos testar a convergência de muitas outras séries por meio da comparação de seus termos com os termos de uma série que já se sabe convergente.

Teorema 10 **Teste da comparação**

Seja Σa_n uma série com termos não-negativos.

(a) Σa_n converge se existe uma série convergente Σc_n com $a_n \leq c_n$ para todo $n > N$, para algum inteiro N.

(b) Σa_n diverge se existe uma série divergente de termos não-negativos Σd_n com $a_n \geq d_n$ para todo $n > N$, para algum inteiro N.

PROVA No item (a), as somas parciais de Σa_n são limitadas superiormente por

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

Portanto, elas formam uma seqüência crescente com um limite $L \leq M$.

No item (b), as somas parciais de Σa_n não são limitadas superiormente. Se fossem, as somas parciais para Σd_n seriam limitadas por

$$M^* = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

e Σd_n convergiria em vez de divergir.

EXEMPLO 1 Aplicando o teste de comparação

(a) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n - 1}$$

diverge porque seu n-ésimo termo

$$\frac{5}{5n - 1} = \frac{1}{n - \frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

é maior que o n-ésimo termo da série harmônica divergente.