Exercícios 11.4

Determinando convergência ou divergência

Quais das séries nos exercícios 1–36 convergem e quais divergem? Justifique as suas respostas.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n + \sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n - 1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n + 1}\right)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$
9. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3}$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln n}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \ln n)^2}$
17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n + 1)}{n + 1}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \ln^2 n)}$
19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n}{n2^n}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n^2 2^n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} + 1}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 1}{3^n}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n + 1}{n(n + 1)(n + 2)}$
28. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3 - 3n}{n^2(n - 2)(n^2 + 5)}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n^{1,1}}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1,3}}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$
32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh} n}{n^2}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$

Teoria e exemplos

37. Com relação ao teste de comparação no limite, prove (a) da Parte 2 e (b) da Parte 3.

38. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, pode-se dizer algo sobre $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n)$? Explique.

39. Suponha que $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para $n \geq N$ (sendo N um inteiro). Se $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = \infty$ e Σa_n converge, pode-se dizer algo sobre Σb_n? Justifique a sua resposta.

40. Prove que se Σa_n é uma série convergente de termos não negativos, então Σa_n^2 converge.

USANDO O COMPUTADOR

41. Não se sabe ainda se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen}^2 n}$$

converge ou diverge. Use um SAC para explorar o comportamento da série seguindo os passos indicados:

(a) Defina a seqüência de somas parciais

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen}^2 n}$$

O que acontece quando você tenta encontrar o limite de s_k quando $k \to \infty$? Seu SAC encontra uma resposta na forma fechada para esse limite?

(b) Represente graficamente os cem primeiros pontos (k, s_k) para a seqüência de somas parciais. Eles parecem convergir? Qual seria sua estimativa do limite?

(c) Em seguida, represente graficamente os 200 primeiros pontos (k, s_k). Discuta o comportamento com suas palavras.

(d) Represente graficamente os 400 primeiros pontos (k, s_k). O que acontece quando $k = 355$? Calcule o número 355/113. Explique a partir de seus cálculos o que acontece quando $k = 355$. Para quais valores de k você acha que esse comportamento poderá ocorrer novamente?

Você encontrará uma discussão interessante sobre essa série no Capítulo 72 de *Mazes for the mind*, de Clifford A. Pickover, Nova York: St. Martin's Press, 1992.

11.5 Testes da razão e da raiz

O teste da razão mede a taxa de crescimento (ou decrescimento) de uma série examinando-se a razão a_{n+1}/a_n. Para uma série geométrica Σar^n, essa taxa é uma constante $((ar^{n+1})/(ar^n) = r)$ e a série converge se e somente se sua razão for menor que 1 em valor absoluto. O teste da razão é uma regra poderosa que estende esse resultado. Nós o provamos a seguir por meio do teste de comparação.