5

Exercícios 11.5

Determinando convergência ou divergência

Quais séries nos exercícios 1–26 convergem e quais divergem? Justifique as suas respostas. (Quando estiver verificando as suas respostas, lembre-se de que existe mais de uma maneira de determinar a convergência ou a divergência de uma série.)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{1{,}25^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$
24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n(n+2)!}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

Quais séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas pelas fórmulas nos exercícios 27–38 convergem e quais divergem? Justifique sua resposta.

27. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \operatorname{sen} n}{n} a_n$
28. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \operatorname{tg}^{-1} n}{n} a_n$
29. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$
30. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$
31. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$
32. $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$
33. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \ln n}{n} a_n$
34. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n + \ln n}{n + 10} a_n$
35. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$
36. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$
37. $a_n = \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$
38. $a_n = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

Quais séries nos exercícios 39–44 convergem e quais divergem? Justifique as suas respostas.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$
40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$
42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$
43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4^n 2^n n!}$
44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)](3^n + 1)}$

Teoria e exemplos

45. Nem o teste da razão nem o teste da raiz ajudam muito quando lidamos com p-séries. Experimente-os em
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
e mostre que nenhum dos dois nos dá informações sobre a convergência da série.

46. Mostre que nem o teste da razão nem o teste da raiz fornecem informações a respeito da convergência de
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \qquad (p \text{ constante})$$

47. Seja $a_n = \begin{cases} n/2^n, & \text{se } n \text{ é um número primo} \\ 1/2^n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$\sum a_n$ converge? Justifique a sua resposta.