27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{-n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 2n + 1}$

32. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{\ln n^2}\right)^n$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)^n}{(2n)^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! n}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sech} n$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{csch} n$

Estimativa do erro

Nos exercícios 45–48, estime a magnitude do erro envolvido ao se usar a soma dos quatro primeiros termos para aproximar a soma da série inteira.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ É possível mostrar que a soma é ln 2.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10^n}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0{,}01)^n}{n}$ Como veremos na Seção 11.7, a soma é ln (1,01).

48. $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad 0 < t < 1$

T Aproxime as somas nos exercícios 49 e 50 com um erro menor que 5×10^{-6}.

49. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$ Como veremos na Seção 11.9, a soma é cos 1, o cosseno de 1 radiano.

50. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ Como veremos na Seção 11.9, a soma é e^{-1}.

Teoria e exemplos

51. (a) A série

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} + \cdots$$

não satisfaz uma das condições do Teorema 14. Qual delas?

(b) Encontre a soma da série no item (a).

52. **T** O limite L de uma série alternada que satisfaz as condições do Teorema 14 está entre os valores de quaisquer duas somas parciais consecutivas. Isso nos sugere o uso da média

$$\frac{s_n + s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2}(-1)^{n+2} a_{n+1}$$

para estimar L. Calcule

$$s_{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{21}$$

como uma aproximação da soma da série harmônica alternada. A soma exata é ln 2 = 0,6931. . .

53. **O sinal do resto de uma série alternada que satisfaz as condições do Teorema 14** Prove a afirmação do Teorema 15 de que sempre que uma série alternada que satisfaça as condições do Teorema 14 se aproximar de uma das suas somas parciais, então o resto (soma dos termos não usados) tem o mesmo sinal que o primeiro termo não usado. (*Sugestão:* Agrupe os termos do resto em pares consecutivos.)

54. Mostre que a soma dos $2n$ primeiros termos da série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

é a mesma que a soma dos n primeiros termos da série

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$$

Essas séries convergem? Qual é a soma dos primeiros $2n + 1$ termos da primeira série? Se a série converge, qual é sua soma?

55. Mostre que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

56. Mostre que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, então

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

57. Mostre que se tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ quanto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem absolutamente, isso também acontece com

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ (para qualquer valor de k)

58. Mostre com exemplo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ pode divergir mesmo que tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ quanto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convirjam.

59. **T** No Exemplo 6, suponha que o objetivo seja arranjar os termos para obter uma nova série que convirja para −1/2. Comece o novo arranjo com o primeiro termo negativo, o qual é −1/2. Sempre que você tiver uma soma que seja menor ou igual a −1/2, comece a introduzir termos positivos, tomados na ordem, até que o novo total seja maior