do que $-1/2$. Então adicione termos negativos até o total ser menor ou igual a $-1/2$ novamente. Continue esse processo até suas somas parciais estarem acima do alvo pelo menos três vezes e termine aí ou abaixo disso. Se s_n for uma soma dos primeiros n termos da sua nova série, marque os pontos (n, s_n) para ilustrar como as somas estão se comportando.

60. **Resumo da prova do teorema do rearranjo (Teorema 17)**

(a) Seja ϵ um número real positivo, seja $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e seja $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Mostre que, para algum índice N_1 e para algum índice $N_2 \geq N_1$,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |s_{N_2} - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

Como todos os termos $a_1, a_2, \ldots, a_{N_2}$ aparecem em algum lugar da seqüência $\{b_n\}$, existe um índice $N_3 \geq N_2$ tal que, se $n \geq N_3$, então $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - s_{N_2}$ é no máximo uma soma dos termos a_m com $m \geq N_1$. Portanto, se $n \geq N_3$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - L\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - s_{N_2}\right| + |s_{N_2} - L| \\ &\leq \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + |s_{N_2} - L| < \epsilon\end{aligned}$$

(b) O argumento no item (a) mostra que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Agora mostre que, como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge para $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

61. **Desdobrando séries absolutamente convergentes**

(a) Mostre que, se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0, & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

(b) Use os resultados do item (a) para mostrar da mesma maneira que, se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{se } a_n \geq 0 \\ a_n, & \text{se } a_n < 0, \end{cases}$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge.

Em outras palavras, se uma série converge absolutamente, seus termos positivos formam uma série convergente e seus termos negativos também. Além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

porque $b_n = (a_n + |a_n|)/2$ e $c_n = (a_n - |a_n|)/2$.

62. O que está errado aqui?

Multiplique ambos os lados da série harmônica alternada

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$$

por 2 para obter

$$2S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Reúna termos com o mesmo denominador, como as setas indicam, para chegar a

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

A série do lado direito da equação é aquela com a qual começamos. Portanto, $2S = S$ e, dividindo por S, obtemos $2 = 1$. (*Fonte*: "Riemann's Rearrangement Theorem", de Stewart Galanor, *Mathematics Teacher*, 1987, v. 80, n. 8, p. 675–681.)

63. Desenhe uma figura similar à Figura 11.9 para ilustrar a convergência da série no Teorema 14 quando $N > 1$.

11.7 Séries de potências

Agora que podemos testar a convergência de séries infinitas, podemos estudar os polinômios infinitos mencionados no início do capítulo. Chamamos esses polinômios de séries de potências porque eles são definidos como séries infinitas de potências de alguma variável – no nosso caso, x. Assim como os polinômios, séries de potências podem ser somadas, subtraídas, multiplicadas, diferenciadas e integradas de forma a resultar em novas séries de potência.