Nos exercícios 33–38, determine o intervalo de convergência da série e, dentro desse intervalo, a soma da série como uma função de x.

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4n}$

34. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n$

36. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

38. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

Teoria e exemplos

39. Para quais valores de x a série

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \cdots$$

converge? Qual é sua soma? Qual série você obtém se derivar a série dada termo a termo? Para quais valores de x a nova série converge? Qual é sua soma?

40. Se você integrar termo a termo a série do Exercício 39, qual nova série você obtém? Para quais valores de x a nova série converge e que outro nome há para sua soma?

41. A série

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

converge para sen x para todo x.

(a) Encontre os seis primeiros termos de uma série para cos x. Para quais valores de x a série deve convergir?

(b) Substituindo x por $2x$ na série para sen x, encontre uma série que convirja para sen $2x$ para todo x.

(c) Usando o resultado do item (a) e a multiplicação de séries, calcule os seis primeiros termos de uma série para 2 sen x cos x. Compare sua resposta com a resposta do item (b).

42. A série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

converge para e^x para todo x.

(a) Encontre uma série para $(d/dx)e^x$. Você obtém a série para e^x? Explique a sua resposta.

(b) Encontre uma série para $\int e^x\,dx$. Você obtém a série para e^x? Explique a sua resposta.

(c) Substitua x por $-x$ na série para e^x para encontrar uma série que convirja para e^{-x} para todo x. Então, multiplique a série para e^x e e^{-x} para encontrar os seis primeiros termos de uma série para $e^{-x} \cdot e^x$.

43. A série

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2.835} + \cdots$$

converge para tg x para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

(a) Encontre os cinco primeiros termos da série para $\ln|\sec x|$. Para quais valores de x a série deve convergir?

(b) Encontre os cinco primeiros termos da série para $\sec^2 x$. Para quais valores de x essa série deve convergir?

(c) Confira seu resultado no item (b) elevando ao quadrado a série dada para sec x no Exercício 44.

44. A série para

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8.064}x^8 + \cdots$$

converge para sec x para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

(a) Encontre os cinco primeiros termos de uma série de potências para a função $\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$. Para quais valores de x a série deve convergir?

(b) Encontre os quatro primeiros termos de uma série para sec x tg x. Para quais valores de x a série deve convergir?

(c) Confira o seu resultado no item (b) multiplicando a série para sec x pela série dada para tg x no Exercício 43.

45. **A unicidade da série de potências convergente**

(a) Mostre que, se duas séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ são convergentes e iguais para todos os valores de x em um intervalo aberto $(-c, c)$, então $a_n = b_n$ para todo n. (*Sugestão*: Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Derive termo a termo para mostrar que tanto a_n quanto b_n são iguais a $f^{(n)}(0)/(n!)$.)

(b) Mostre que se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ para todo x em um intervalo aberto $(-c, c)$, então $a_n = 0$ para todo n.

46. **A soma da série $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2/2^n)$** Para encontrar a soma dessa série, expresse $1/(1-x)$ como uma série geométrica, derive ambos os lados da equação resultante em relação a x, multiplique ambos os lados do resultado por x, derive novamente, multiplique por x novamente e faça x igual a 1/2. O que você obtém? (*Fonte*: Carta de David E. Dobbs ao editor, *Illinois Mathematics Teacher*, v. 33, n. 4, 1982, p. 27.)

47. **Convergência nas extremidades** Mostre com exemplos que a convergência de uma série de potências na extremidade de seu intervalo de convergência pode ser condicional ou absoluta.

48. Componha uma série de potências cujo intervalo de convergência seja

(a) $(-3, 3)$ (b) $(-2, 0)$ (c) $(1, 5)$