Duas questões ainda permanecem:

1. Para quais valores de x podemos normalmente esperar que uma série de Taylor convirja para sua função geradora?
2. Com que precisão o polinômio de Taylor de uma função se aproxima da função em dado intervalo?

As respostas serão dadas pelo teorema de Taylor na próxima seção.

Exercícios 11.8

Encontrando polinômios de Taylor

Nos exercícios 1–8, encontre os polinômios de Taylor de ordens 0, 1, 2 e 3 gerados por f em a.

1. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$
2. $f(x) = \ln(1 + x), \quad a = 0$
3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$
4. $f(x) = 1/(x + 2), \quad a = 0$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/4$
6. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/4$
7. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$
8. $f(x) = \sqrt{x + 4}, \quad a = 0$

Encontrando séries de Taylor em $x = 0$ (séries de Maclaurin)

Encontre a série de Maclaurin para as funções nos exercícios 9–20.

9. e^{-x}
10. $e^{x/2}$
11. $\dfrac{1}{1 + x}$
12. $\dfrac{1}{1 - x}$
13. $\operatorname{sen} 3x$
14. $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$
15. $7 \cos(-x)$
16. $5 \cos \pi x$
17. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
18. $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
19. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
20. $(x + 1)^2$

Encontrando séries de Taylor

Nos exercícios 21–28, encontre a série de Taylor gerada por f em $x = a$.

21. $f(x) = x^3 - 2x + 4, a = 2$
22. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8, a = 1$
23. $f(x) = x^4 + x^2 + 1, a = -2$
24. $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2, a = -1$
25. $f(x) = 1/x^2, a = 1$
26. $f(x) = x/(1 - x), a = 0$
27. $f(x) = e^x, a = 2$
28. $f(x) = 2^x, a = 1$

Teoria e exemplos

29. Use a série de Taylor gerada por e^x em $x = a$ para mostrar que

$$e^x = e^a \left[1 + (x - a) + \frac{(x - a)^2}{2!} + \cdots\right]$$

30. (*Continuação do Exercício 29.*) Encontre a série de Taylor gerada por e^x em $x = 1$. Compare sua resposta com a fórmula do Exercício 29.

31. Imagine que $f(x)$ possui derivadas de ordem n em $x = a$. Mostre que o polinômio de Taylor de ordem n e suas primeiras n derivadas têm os mesmos valores que f e suas primeiras n derivadas em $x = a$.

32. **Dentre todos os polinômios de grau $\leq n$, o polinômio de Taylor de ordem n dá a melhor aproximação** Suponha que $f(x)$ seja derivável em um intervalo centrado em $x = a$ e que $g(x) = b_0 + b_1(x - a) + \ldots + b_n(x - a)^n$ seja um polinômio de grau n com coeficientes constantes $b_0, \ldots, b_n$. Seja $E(x) = f(x) - g(x)$. Mostre que, se impusermos para g as condições

(a) $E(a) = 0$ — O erro de aproximação é zero em $x = a$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{E(x)}{(x - a)^n} = 0$ — O erro é desprezível quando comparado a $(x - a)^n$.

então

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Portanto, o polinômio de Taylor $P_n(x)$ é o único polinômio de grau menor ou igual a n cujo erro é zero em $x = a$ e desprezível quando comparado com $(x - a)^n$.