Aproximações quadráticas

O polinômio de Taylor de ordem 2 gerado por uma função $f(x)$ duas vezes derivável em $x = a$ é chamada **aproximação quadrática** de f em $x = a$. Nos exercícios 33–38, encontre

(a) a linearização (polinômio de Taylor de ordem 1) em $x = 0$;
(b) a aproximação quadrática de f em $x = 0$.

33. $f(x) = \ln(\cos x)$
34. $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$
35. $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$
36. $f(x) = \cosh x$
37. $f(x) = \operatorname{sen} x$
38. $f(x) = \operatorname{tg} x$

11.9 Convergência de séries de Taylor; estimativas de erro

Nesta seção, trataremos das duas questões que ficaram sem resposta na Seção 11.8:

1. Quando uma série de Taylor converge para sua função geradora?
2. Com que precisão um polinômio de Taylor de uma função se aproxima da função em dado intervalo?

Teorema de Taylor

Respondemos a essas duas questões com o próximo teorema.

Teorema 22 **Teorema de Taylor**
Se f e suas primeiras n derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ são contínuas no intervalo fechado entre a e b, e $f^{(n)}$ for derivável no intervalo aberto entre a e b, então existe um número c entre a e b tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}$$

O teorema de Taylor é uma generalização do teorema do valor médio (Exercício 39). Há uma prova para o teorema de Taylor no final deste capítulo.

Quando aplicamos o teorema de Taylor, normalmente desejamos manter o valor de a fixo e tratar b como uma variável independente. A fórmula de Taylor é mais fácil de ser empregada em situações como estas se trocarmos b por x. A seguir apresentamos uma versão do teorema com essas modificações.

Fórmula de Taylor
Se f tem derivadas de todas as ordens em um intervalo aberto I contendo a, então, para cada inteiro positivo n e para cada x em I

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x) \qquad (1)$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} \quad \text{para algum } c \text{ entre } a \text{ e } x. \qquad (2)$$