Com K definido pela Equação (7), a função

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

mede a diferença entre a função original f e a função aproximadora ϕ_n para cada x em $[a, b]$.

Agora, usamos o teorema de Rolle (Seção 4.2, Volume I). Primeiro, como $F(a) = F(b) = 0$ e ambas F e F' são contínuas em $[a, b]$, sabemos que

$$F'(c_1) = 0 \quad \text{para algum } c_1 \text{ em } (a, b)$$

Em seguida, como $F'(a) = F'(c_1) = 0$ e tanto F' quanto F'' são contínuas em $[a, c_1]$, sabemos que

$$F''(c_2) = 0 \quad \text{para algum } c_2 \text{ em } (a, c_1)$$

O Teorema de Rolle, aplicado sucessivamente a F'' e F''',. . ., $F^{(n-1)}$ implica a existência de

$$\begin{array}{lll} c_3 & \text{em } (a, c_2) & \text{tal que } F'''(c_3) = 0 \\ c_4 & \text{em } (a, c_3) & \text{tal que } F^{(4)}(c_4) = 0 \\ & \vdots & \\ c_n & \text{em } (a, c_{n-1}) & \text{tal que } F^{(n)}(c_n) = 0 \end{array}$$

Por fim, como $F^{(n)}$ é contínua em $[a, c_n]$ e derivável em (a, c_n), e $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$, o teorema de Rolle implica que existe um número c_{n+1} em (a, c_n) tal que

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0 \tag{8}$$

Se derivarmos $F(x) = f(x) - P_n(x) - K(x - a)^{n+1}$ um total de $n + 1$ vezes, obtemos

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n + 1)!K \tag{9}$$

Juntas, as equações (8) e (9) nos dão

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \quad \text{para algum número } c = c_{n+1} \text{ em } (a, b) \tag{10}$$

As equações (7) e (10) nos dão

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}$$

Com isso, concluímos a prova.

Exercícios 11.9

Séries de Taylor por substituição

Use substituição (como no Exemplo 4) para encontrar a série de Taylor em $x = 0$ das funções nos exercícios 1–6.

1. e^{-5x} **2.** $e^{-x/2}$ **3.** $5\,\text{sen}(-x)$

4. $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ **5.** $\cos\sqrt{x + 1}$ **6.** $\cos\left(x^{3/2}/\sqrt{2}\right)$

Mais séries de Taylor

Encontre as séries de Taylor em $x = 0$ para as funções dos exercícios 7–18.

7. xe^x **8.** $x^2\,\text{sen}\,x$ **9.** $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$

10. $\text{sen}\,x - x + \frac{x^3}{3!}$ **11.** $x\cos \pi x$ **12.** $x^2\cos(x^2)$