13. $\cos^2 x$ (*Sugestão*: $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.)

14. $\text{sen}^2\, x$

15. $\dfrac{x^2}{1 - 2x}$

16. $x \ln(1 + 2x)$

17. $\dfrac{1}{(1 - x)^2}$

18. $\dfrac{2}{(1 - x)^3}$

Estimativas de erros

19. Aproximadamente, para quais valores de x você pode substituir sen x por $x - (x^3/6)$ com um erro cuja magnitude não seja superior a 5×10^{-4}? Justifique a sua resposta.

20. Se cos x for substituído por $1 - (x^2/2)$ e $|x| < 0{,}5$, qual estimativa poderá ser feita do erro? $1 - (x^2/2)$ tende a ser muito grande ou muito pequeno? Justifique a sua resposta.

21. Quão precisa é a aproximação sen $x = x$ quando $|x| < 10^{-3}$? Para quais desses valores de x ocorrerá de $x <$ sen x?

22. A estimativa $\sqrt{1 + x} = 1 + (x/2)$ é usada quando x é pequeno. Estime o erro quando $|x| < 0{,}01$.

23. A aproximação $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ é usada quando x é pequeno. Use o teorema da estimativa do resto para estimar o erro quando $|x| < 0{,}1$.

24. (*Continuação do Exercício 23.*) Quando $x < 0$, a série para e^x é uma série alternada. Use o teorema da estimativa de séries alternadas para estimar o erro que resulta da substituição de e^x por $1 + x + (x^2/2)$ quando $-0{,}1 < x < 0$. Compare a sua estimativa com a que você obteve no Exercício 23.

25. Estime o erro na aproximação senh $x = x + (x^3/3!)$ quando $|x| < 0{,}5$. (*Sugestão*: Use R_4, não R_3.)

26. Quando $0 \leq h \leq 0{,}01$, mostre que e^h pode ser substituído por $1 + h$ com um erro cuja magnitude não ultrapassa 0,6% de h. Use $e^{0{,}01} = 1{,}01$.

27. Para quais valores positivos de x você pode substituir $\ln(1 + x)$ por x com um erro que não ultrapasse 1% do valor de x?

28. Você planeja estimar $\pi/4$ pela determinação da série de Maclaurin para $\text{tg}^{-1} x$ em $x = 1$. Use o teorema da estimativa de séries alternadas para determinar quantos termos da série você tem de adicionar para ter certeza de que a estimativa tem precisão de duas casas decimais.

29. (a) Use a série de Taylor para sen x e o teorema da estimativa de séries alternadas para mostrar que
$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\text{sen}\, x}{x} < 1, \quad x \neq 0$$
(b) Faça o gráfico de $f(x) = (\text{sen}\, x)/x$ juntamente com o **T** das funções $y = 1 - (x^2/6)$ e $y = 1$ para $-5 \leq x \leq 5$. Comente a relação entre os dois gráficos.

30. (a) Use a série de Taylor para cos x e o teorema da estimativa de séries alternadas para mostrar que
$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}, \quad x \neq 0$$
(Esta é a desigualdade do Exercício 52, Seção 2.2, Volume I.)
(b) Faça o gráfico de $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$ juntamente **T** com o das funções $y = (1/2) - (x^2/24)$ e $y = 1/2$ para $-9 \leq x \leq 9$. Comente a relação entre os dois gráficos.

Encontrando e identificando séries de Maclaurin

Lembre-se de que série de Maclaurin é simplesmente outro nome para a série de Taylor em $x = 0$. Cada uma das séries nos exercícios 31–34 representa o valor da série de Maclaurin da função $f(x)$ em algum ponto. Qual é a função e qual é o ponto? Qual é a soma da série?

31. $(0{,}1) - \dfrac{(0{,}1)^3}{3!} + \dfrac{(0{,}1)^5}{5!} - \cdots + \dfrac{(-1)^k(0{,}1)^{2k+1}}{(2k + 1)!} + \cdots$

32. $1 - \dfrac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} + \dfrac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} - \cdots + \dfrac{(-1)^k(\pi)^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k!)} + \cdots$

33. $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi^3}{3^3 \cdot 3} + \dfrac{\pi^5}{3^5 \cdot 5} - \cdots + \dfrac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{3^{2k+1}(2k + 1)} + \cdots$

34. $\pi - \dfrac{\pi^2}{2} + \dfrac{\pi^3}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\dfrac{\pi^k}{k} + \cdots$

35. Multiplique a série de Maclaurin para e^x e sen x junto para encontrar os cinco primeiros termos de Maclaurin diferentes de zero para e^x sen x.

36. Multiplique a série de Maclaurin para e^x e cos x junto para encontrar os cinco primeiros termos de Maclaurin diferentes de zero para e^x cos x.

37. Use a identidade $\text{sen}^2\, x = (1 - \cos 2x)/2$ para obter a série de Maclaurin para $\text{sen}^2\, x$. Então, derive a série para chegar à série de Maclaurin para 2 sen x cos x. Verifique se esta é a série para sen $2x$.

38. (*Continuação do Exercício 37.*) Use a identidade $\cos^2 x = \cos 2x + \text{sen}^2\, x$ para obter a série de potências para $\cos^2 x$.

Teoria e exemplos

39. **Teorema de Taylor e teorema do valor médio** Explique como o teorema do valor médio (Seção 4.2, Teorema 4) é um caso especial do teorema de Taylor.

40. **Linearizações nos pontos de inflexão** Mostre que, se o gráfico de uma função $f(x)$ duas vezes derivável tem um ponto de inflexão em $x = a$, então a linearização de f em $x = a$ também é a aproximação quadrática de f em $x = a$.