Isso explica por que retas tangentes se ajustam tão bem nos pontos de inflexão.

41. **O (segundo) teste da derivada segunda** Use a equação

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x - a)^2$$

para provar o teste a seguir.

Seja f uma função com derivadas primeira e segunda contínuas e suponha que $f'(a) = 0$. Então,

(a) f tem um máximo local em a se $f'' \leq 0$ em um intervalo cujo interior contém a;

(b) f tem um mínimo local em a se $f'' \geq 0$ em um intervalo cujo interior contém a.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x - a)^2$$

42. **Uma aproximação cúbica** Use a fórmula de Taylor com $a = 0$ e $n = 3$ para encontrar a aproximação cúbica padrão de $f(x) = 1/(1 - x)$ em $x = 0$. Dê um limitante superior para o erro na aproximação quando $|x| \leq 0{,}1$.

43. (a) Use a fórmula de Taylor com $n = 2$ para encontrar a aproximação quadrática de $f(x) = (1 + x)^k$ em $x = 0$ (k é constante).

(b) Se $k = 3$, para aproximadamente quais valores de x no intervalo $[0, 1]$ o erro da aproximação quadrática será menor que $1/100$?

44. **Aperfeiçoando aproximações para π**

(a) Seja P uma aproximação de π precisa até n casas decimais. Mostre que $P + \operatorname{sen} P$ dá uma aproximação correta até $3n$ casas decimais. (*Sugestão*: Considere que $P = \pi + x$.)

T (b) Tente fazer isso com uma calculadora.

45. **A série de Maclaurin gerada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$** Uma função definida pela série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência $c > 0$ possui uma série de Taylor que converge para a função em todos os pontos de $(-c, c)$. Mostre que isso é verdade demonstrando que a série de Taylor gerada pela função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é a própria série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Uma conseqüência imediata disso é que séries como

$$x \operatorname{sen} x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots$$

e

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots$$

obtidas pela multiplicação de séries de Taylor por potências de x, assim como séries obtidas pela integração e derivação de séries de potências convergentes, são as próprias séries de Taylor geradas pelas funções que elas representam.

46. **Séries de Taylor para funções pares e funções ímpares** (*Continuação do Exercício 45 da Seção 11.7.*) Suponha que $f(x)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convirja para todo x em um intervalo aberto $(-c, c)$.

(a) Mostre que, se f é par, então $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$; isto é, a série para f em $x = 0$ contém somente potências pares de x.

(b) Mostre que, se f é ímpar, então $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots 0$; isto é, a série para f em $x = 0$ contém somente potências ímpares de x.

47. **Polinômios de Taylor de funções periódicas**

(a) Mostre que toda função periódica contínua $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, é de magnitude limitada provando que existe uma constante positiva M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x.

(b) Mostre que o gráfico de todo polinômio de Taylor de grau positivo gerado por $f(x) = \cos x$ se afasta do gráfico de $\cos x$ à medida que $|x|$ aumenta. Você pode ver isso na Figura 11.13. Os polinômios de Taylor de $\operatorname{sen} x$ se comportam de maneira similar (Figura 11.15).

T. (a) Faça o gráfico das curvas $y = (1/3) - (x^2)/5$ e $y = (x - \operatorname{tg}^{-1} x)/x^3$ juntamente com o da reta $y = 1/3$.

(b) Use uma série de Maclaurin para explicar o que você vê. Qual é

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg}^{-1} x}{x^3}\ ?$$

Identidade de Euler

49. Use a Equação (6) para escrever as potências de e a seguir na forma $a + bi$.

(a) $e^{-i\pi}$ (b) $e^{i\pi/4}$ (c) $e^{-i\pi/2}$

50. Use a Equação (6) para mostrar que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

51. Defina as equações do Exercício 50 por meio da combinação da série formal de Taylor para $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$.

52. Mostre que

(a) $\cosh i\theta = \cos\theta$ (b) $\operatorname{senh} i\theta = i \operatorname{sen}\theta$

53. Multiplicando a série de Taylor para e^x e $\operatorname{sen} x$, encontre os termos dessas séries até x^5. Essa é a parte imaginária da série para

$$e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x}$$