Use essa informação para verificar sua resposta. Para quais valores de x a série para e^x sen x deveria convergir?

54. Quando a e b são reais, definimos $e^{(a+ib)x}$ com a equação

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx)$$

Derive o lado direito da equação para mostrar que

$$\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a + ib)e^{(a+ib)x}$$

Assim, a já conhecida regra $(d/dx)e^{kx} = ke^{kx}$ será verdadeira tanto para k complexo quanto para k real.

55. Use a definição de $e^{i\theta}$ para mostrar que para quaisquer números reais θ, θ_1 e θ_2,

(a) $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, (b) $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$

56. Dois números complexos $a + ib$ e $c + id$ são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$. Com base nisso, determine

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx \quad \text{e} \quad \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$$

a partir de

$$\int e^{(a+ib)x}\, dx = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{(a+ib)x} + C$$

onde $C = C_1 + iC_2$ é uma constante de integração complexa.

USANDO O COMPUTADOR

Aproximações lineares, quadráticas e cúbicas

A fórmula de Taylor com $n = 1$ e $a = 0$ fornece a linearização de uma função em $x = 0$. Com $n = 2$ e $n = 3$, obtemos as aproximações quadráticas e cúbicas padrão. Nesses exercícios, exploraremos os erros associados com essas aproximações. Procuramos por respostas para duas perguntas:

(a) Para quais valores de x a função pode ser substituída por aproximação com um erro menor que 10^{-2}?

(b) Qual é o erro máximo que poderemos esperar se trocarmos a função por aproximação no intervalo especificado?

Usando um SAC, execute os seguintes passos para ajudar nas respostas dos itens (a) e (b) para as funções e os intervalos nos exercícios 57–62.

Passo 1: Faça o gráfico da função no intervalo especificado.

Passo 2: Encontre os polinômios de Taylor $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$ em $x = 0$.

Passo 3: Calcule a derivada $f^{(n+1)}(c)$ de ordem $(n + 1)$ associada ao resto para cada polinômio de Taylor. Faça o gráfico da derivada como uma função de c no intervalo especificado e estime seu máximo valor absoluto M.

Passo 4: Calcule o resto $R_n(x)$ para cada polinômio. Usando o M estimado no passo 3 no lugar de $f^{(n+1)}(c)$, represente graficamente $R_n(x)$ no intervalo especificado. Então estime os valores de x que respondem à questão (a).

Passo 5: Compare seu erro estimado com o erro real $E_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$ representando graficamente $E_n(x)$ no intervalo especificado. Isso ajudará a responder à questão (b).

Passo 6: Faça os gráficos da função e de suas três aproximações de Taylor juntos. Discuta os gráficos em relação às informações obtidas nos passos 4 e 5.

57. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $|x| \le \dfrac{3}{4}$

58. $f(x) = (1 + x)^{3/2}$, $-\dfrac{1}{2} \le x \le 2$

59. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $|x| \le 2$

60. $f(x) = (\cos x)(\operatorname{sen} 2x)$, $|x| \le 2$

61. $f(x) = e^{-x}\cos 2x$, $|x| \le 1$

62. $f(x) = e^{x/3}\operatorname{sen} 2x$, $|x| \le 2$

11.10 Aplicações das séries de potências

Esta seção apresenta a série binomial para estimativa de potências e raízes e mostra como as séries podem ser eventualmente utilizadas para aproximar a solução de um problema de valor inicial, para avaliar integrais não-elementares e limites que levam a formas indeterminadas. Apresentamos uma derivação completa das séries de Taylor para $\operatorname{tg}^{-1} x$ e concluímos com uma tabela de referência das séries mais freqüentes.

Séries binomiais para potências e raízes

A série de Taylor gerada por $f(x) = (1 + x)^m$, quando m é constante, é

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots. \qquad (1)$$