

Exercícios 11.10

Série binomial

Encontre os quatro primeiros termos da série binomial para as funções nos exercícios 1-10.

1. $(1+x)^{1/2}$
2. $(1+x)^{1/3}$
3. $(1-x)^{-1/2}$
4. $(1-2x)^{1/2}$
5. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$
6. $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$
7. $(1+x^3)^{-1/2}$
8. $(1+x^2)^{-1/3}$
9. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$
10. $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}$

Encontre a série binomial para as funções nos exercícios 11-14.

11. $(1+x)^4$
12. $(1+x^2)^3$
13. $(1-2x)^3$
14. $\left(1-\frac{x}{2}\right)^4$

Problemas de valor inicial

Encontre soluções na forma de séries para os problemas de valor inicial nos exercícios 15-32.

15. $y' + y = 0, y(0) = 1$
16. $y' - 2y = 0, y(0) = 1$
17. $y' - y = 1, y(0) = 0$
18. $y' + y = 1, y(0) = 2$
19. $y' - y = x, y(0) = 0$
20. $y' + y = 2x, y(0) = -1$
21. $y' - xy = 0, y(0) = 1$
22. $y' - x^2y = 0, y(0) = 1$
23. $(1-x)y' - y = 0, y(0) = 2$
24. $(1+x^2)y' + 2xy = 0, y(0) = 3$
25. $y'' - y = 0, y'(0) = 1$ e $y(0) = 0$
26. $y'' + y = 0, y'(0) = 0$ e $y(0) = 1$
27. $y'' + y = x, y'(0) = 1$ e $y(0) = 2$
28. $y'' - y = x, y'(0) = 2$ e $y(0) = -1$
29. $y'' - y = -x, y'(2) = -2$ e $y(2) = 0$
30. $y'' - x^2y = 0, y'(0) = b$ e $y(0) = a$
31. $y'' + x^2y = x, y'(0) = b$ e $y(0) = a$
32. $y'' - 2y' + y = 0, y'(0) = 1$ e $y(0) = 0$

Aproximações e integrais não-elementares

Nos exercícios 33-36, use séries para estimar o valor das integrais com um erro menor que 10^{-3} . (A seção de respostas apresenta o valor das integrais arredondado para cinco casas decimais.)

33. $\int_0^{0.2} \sin x^2 dx$
34. $\int_0^{0.2} \frac{e^{-x} - 1}{x} dx$

$$35. \int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx \quad 36. \int_0^{0.25} \sqrt[3]{1+x^2} dx$$

Use séries para aproximar os valores das integrais nos exercícios 37-40 com um erro menor do que 10^{-8} .

$$37. \int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx \quad 38. \int_0^{0.1} e^{-x^2} dx$$

$$39. \int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} dx \quad 40. \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

41. Estime o erro se $\cos t^2$ é aproximado por $1 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{4!}$ na integral $\int_0^1 \cos t^2 dt$.

42. Estime o erro se $\cos \sqrt{t}$ é aproximado por $1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!}$ na integral $\int_0^1 \cos \sqrt{t} dt$.

Nos exercícios 43-46, encontre um polinômio que aproximará $F(x)$ ao longo do intervalo dado com um erro menor que 10^{-3} .

$$43. F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt \quad [0, 1]$$

$$44. F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \quad [0, 1]$$

$$45. F(x) = \int_0^x \operatorname{tg}^{-1} t dt \quad \text{(a) } [0; 0,5] \quad \text{(b) } [0, 1]$$

$$46. F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \quad \text{(a) } [0; 0,5] \quad \text{(b) } [0, 1]$$

Formas indeterminadas

Use séries para calcular os limites nos exercícios 47-56.

$$47. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$49. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t - (t^2/2)}{t^4}$$

$$50. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \theta + (\theta^3/6)}{\theta^5}$$

$$51. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \operatorname{tg}^{-1} y}{y^3}$$

$$52. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^{-1} y - \sin y}{y^3 \cos y}$$

$$53. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{-1/x^2} - 1)$$

$$54. \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \sin \frac{1}{x+1}$$

$$55. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \cos x}$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(x-1)}$$

Teoria e exemplos

57. Substitua x por $-x$ na série de Taylor para $\ln(1+x)$ para obter uma série para $\ln(1-x)$. Então a subtraia da série de Taylor para $\ln(1+x)$ para mostrar que para $|x| < 1$,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$