58. Quantos termos da série de Taylor para $\ln(1 + x)$ você deve adicionar para ter certeza de que está calculando $\ln(1{,}1)$ com um erro menor que 10^{-8}? Justifique a sua resposta.

59. De acordo com o teorema da estimativa de séries alternadas, quantos termos da série de Maclaurin para $\operatorname{tg}^{-1} 1$ você teria de adicionar para ter certeza de que encontrou $\pi/4$ com um erro menor que 10^{-3}? Justifique a sua resposta.

60. Mostre que a série de Taylor para $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$ diverge para $|x| > 1$.

61. **Estimando Pi** Cerca de quantos termos da série de Taylor para $\operatorname{tg}^{-1} x$ você precisaria usar para calcular cada termo do lado direito da equação

T

$$\pi = 48 \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{18} + 32 \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{57} - 20 \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{239}$$

com um erro menor que 10^{-6}? Em contrapartida, a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ para $\pi^2/6$ é tão lenta que nem 50 termos conseguirão nos dar a precisão de duas casas.

62. Integre os três primeiros termos diferentes de zero da série de Taylor para $\operatorname{tg} t$ de 0 a x para obter os três primeiros termos diferentes de zero da série de Taylor para $\ln \sec x$.

63. (a) Use a série binomial e o fato de que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = (1 - x^2)^{-1/2}$$

para gerar os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Taylor para $\operatorname{sen}^{-1} x$. Qual é o raio de convergência?

(b) **Série para $\cos^{-1} x$** Use o resultado do item (a) para encontrar os cinco primeiros termos não-nulos da série de Taylor para $\cos^{-1} x$.

64. (a) **Série para $\operatorname{senh}^{-1} x$** Encontre os quatro primeiros termos diferentes de zero para a série de Taylor para

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}$$

(b) Use os *três* primeiros termos da série do item (a) para estimar $\operatorname{senh}^{-1} 0{,}25$. Forneça um limitante superior para a magnitude da estimativa do erro.

T

65. Calcule a série de Taylor para $1/(1 + x)^2$ a partir da série para $-1/(1 + x)$.

66. Use a série de Taylor para $1/(1 - x^2)$ para obter uma sér para $2x/(1 - x^2)^2$.

67. **Estimando Pi** O matemático inglês Wallis descobriu fórmula

T

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cdots}$$

A partir dela, encontre o valor de π com duas casas decimais

68. Construa uma tabela de logaritmos naturais $\ln n$ para $n =$ 1, 2, 3, . . ., 10 usando a fórmula do Exercício 57, mas, par economizar o trabalho de ter de calcular muitos logarit mos por série, aproveite as relações $\ln 4 = 2 \ln 2$, $\ln 6 =$ $\ln 2 + \ln 3$, $\ln 8 = 3 \ln 2$, $\ln 9 = 2 \ln 3$ e $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$ No Exercício 57, comece utilizando os seguintes valores para x:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{13}$$

69. **Série para $\operatorname{sen}^{-1} x$** Integre a série binomial para $(1 - x^2)^{-1/2}$ para mostrar que para $|x| < 1$,

$$\operatorname{sen}^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$$

70. **Série para $\operatorname{tg}^{-1} x$ para $|x| > 1$** Derive a série

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x > 1$$

$$\operatorname{tg}^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x < -1,$$

por meio da integração da série

$$\frac{1}{1 + t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + (1/t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \cdots$$

No primeiro caso, faça de x a ∞ e no segundo caso, de $-\infty$ a x.

71. **O valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{-1}(2/n^2)$**

(a) Use a fórmula para tangente da diferença entre dois ângulos para mostrar que

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1}(n + 1) - \operatorname{tg}^{-1}(n - 1)) = \frac{2}{n^2}$$

(b) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{n^2} = \operatorname{tg}^{-1}(N + 1) + \operatorname{tg}^{-1} N - \frac{\pi}{4}$$

(c) Encontre o valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{n^2}$

11.11 Séries de Fourier

Por meio de polinômios, vimos como uma série de Taylor pode ser utilizada para aproximar uma função f. Os polinômios de Taylor fazem f chegar bem próxima de um ponto particular $x = a$, mas o erro na aproximação