Análise de Algoritmos

Terceira Lista de Exercícios

Algoritmos Algébricos e Noções de Teoria de Complexidade

13 de maio de 2009

Prof. Mauricio Ayala-Rincón

Entrega: 12 de junho de 2009 (100%) - Grupos de cinco pessõas
Será disponibilizado um gabarito da lista, depois do dia 12 de junho
Listas entregues fora do prazo: 0%

Algoritmos Algébricos

1. Demonstre que o método de Horner para avaliação de polinômios realiza um número de operações de adição (substração) que é ótimo.

2. Pré-processe o polinômio $x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8$, segundo o método visto na aula. Logo, use o pré-procesamento para avaliar o polinômio nos pontos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

   Qual seria a vantagem da aplicação do método com pré-processamento para avaliar dito polinônio com relação ao custo (multiplicações/adições) de dez aplicações diretas do método de Horner?

3. Explique o método de Winograd para multiplicação de matrizes. Inclua na sua explicação:
   (a) Uma apresentação detalhada do algoritmo de Winograd, onde seja explícitada a adatação do método para matrizes com tamanhos ímpares.
   (b) A análise da complexidade tempo/espaço do método.

4. Explique o método de Strassen para multiplicação de matrizes. Inclua na sua explicação:
   (a) Uma apresentação detalhada do algoritmo de Strassen, onde seja indicado como este se adataria para multiplicação de matrizes não necessariamente quadradas.
   (b) A análise da complexidade tempo/espaço do método.

5. Descreva o algoritmo de Karatsuba para multiplicação de polinômios, explique como pode ser adatado para multiplicação numérica e analise a sua complexidade tempo.

6. Considere o polinômio
   $$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$
   Calcule a transformada discreta de Fourier, segundo o método FFT.

   Ajuda: Lembre que a transformada discreta de Fourier de $P(x)$, $F_4 \times P$, é o 4-vetor que tem componentes resultantes da avaliação de $P(x)$ nas quatro 4-raízes complexas da unidade; i.e., $P(1)$, $P(i)$, $P(-1)$, e $P(-i)$:
   $$\begin{bmatrix} P(1) \\ P(i) \\ P(-1) \\ P(-i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e que para uma raiz ω primitiva se tem $P(\omega) = P_P(\omega^2) + \omega P_I(\omega^2)$ e $P(-\omega) = P_P(\omega^2) - \omega P_I(\omega^2)$.

7. Considere o polinômio

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7$$

Avalie $F_8 \times P$; i.e. P nas oito 8-raízes complexas da unidade de um utilizando o método FFT.

8. Explique e ilustre a implementação do circuito lógico correspondente à implementação de F_8 pelo método FFT.

9. Explique os três passos do método de aplicação do método baseado em FFT para avaliação simbólica de multiplicação de polinômios.

   Para cada um dos passos, explique a complexidade em tempo e espaço e conclua, então a complexidade do método.

   Exemplifique a aplicação do método para multiplicar os polinômios

$$P(x) = 1 + 4x^2 + 2x^3 \quad \text{e} \quad Q(x) = x + 2x^2 + x^3 + 2x^4$$

Noções de Teoria de Complexidade

10. Quais dos seguintes problemas de decisão ou otimização são da classe $\mathcal{P}$ e quais da classe $\mathcal{NP}$?
    Explique suas respostas (i.e., para problemas da classe $\mathcal{P}$ mencione um algoritmo determinista polinomial e para problemas da classe $\mathcal{NP}$ mencione um algoritmo não determinista polinomial). Como $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$, sempre que o problema pertence à classe $\mathcal{P}$, responda $\mathcal{P}$.

    (a) 3-coloração de grafos.
    (b) Soma de subconjuntos.
    (c) Execução de tarefas com penalidade.
    (d) Caminhos Eulerianos em grafos (ciclos visitando todas as arestas).
    (e) Caminhos Hamiltonianos em grafos (ciclos visitando todos os vértices).

11. Seja Π um problema de decisão em $\mathcal{P}$. Demonstre que se um problema Γ se pode reduzir polinomialmente ao problema Π, então $\Gamma \in \mathcal{P}$.

12. Redução polinomial e problemas $\mathcal{NP}$-completos.
    Usando o fato, provado no teorema de Cook, de que *CNF-SAT* é $\mathcal{NP}$-completo, demonstre que o problema $CLIQUE$ também é $\mathcal{NP}$-completo.

    Ajuda: É necessário demonstrar, em primeiro lugar, que $CLIQUE$ é um problema $\mathcal{NP}$ e, em segundo lugar, que $CNF\text{-}SAT <_{\mathcal{P}} CLIQUE$.