Linguagens Formais e Autômatos
Lista de Exercícios Sobre Gramáticas Livres de Contexto, Autômatos Finitos e Expressões Regulares

28 de junho de 2002

Prof. Mauricio Ayala Rincón

Entrega: antes do 11 de julho de 2002 em grupos de máximo três pessoas.

1. (a) Demonstre que o conjunto dos subconjuntos finitos de $I\!N$ é enumerável.
   (b) Demonstre que o conjunto de funções totais de $I\!N$ a $\{0, 1\}$ não é enumerável.

2. Sejam A e B conjuntos finitos. Demonstre que existem $|B|^{|A|}$ possíveis funções entre A e B.

3. Use argumentação de cardinalidade de conjuntos para indicar o porquê existem problemas para os quais não existe solução algorítmica. Em outras palavras, o porquê o número de soluções algorítmicas é menor que o número de problemas existentes.

4. Considere um alfabeto finito Σ. O reverso, w^R de uma palavra $w \in \Sigma^*$ é definido recursivamente como segue:
   - se $|w| = 0$ então $w^R = w = \lambda$;
   - se não, $w = ua$ para algum $a \in \Sigma$ e $u \in \Sigma^*$ e $w^R = au^R$.

   Demonstre indutivamente que para todo $x, y \in \Sigma^*$ vale o seguinte:
   - $(xy)^R = y^R x^R$;
   - $(x^R)^R = x$ e
   - $(x^n)^R = (x^R)^n$.

5. Escreva expressões regulares para as seguintes linguagens sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.
   - $\{w \mid |w|_a \leq 3\}$;
   - $\{w \mid |w|_a$ divisível por $3\}$;
   - $\{w \mid aaa$ é subpalavra de w com exatamente uma ocorrência$\}$.
   - $\{w \mid |w|_a$ e $|w|_b$ são ambas ímpares$\}$.

6. Considere a gramática livre de contexto

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to ASB|\lambda \\ A \to aAb|\lambda \\ B \to bBa|ba \end{array}$$

   (a) Apresente derivações esquerdas e direitas da palavra $aabbba$ e de $abaabbbabbaa$.
   (b) Descreva a linguagem $L(G)$ em notação de conjuntos.

7. Para cada uma das seguintes gramáticas descreva em notação de conjuntos $L(G)$.
   (a)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aaSB|\lambda \\ B \to bB|b \end{array}$$

   (b)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to abSdc|A \\ A \to cdAba|\lambda \end{array}$$

(c)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aSB|aB \\ B \to bb|b \end{array}$$

8. Construa gramáticas livres de contexto para gerar as seguintes linguagens.
   (a) $\{a^n b^{2n} c^m \mid n, m > 0\}$ sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.
   (b) $\{a^n b^m c^{2n+m} \mid n, m > 0\}$ sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.
   (c) $\{a^m b^n \mid 0 \leq n \leq m \leq 3n\}$ sobre o alfabeto $\{a, b\}$.
   (d) $\{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ sobre o alfabeto $\{a, b\}$.
   (e) $\{w \mid |w| = n$ ímpar e primeiro e símbolo no meio de w coincidem $\}$ sobre o alfabeto $\{a, b\}$.
9. Para as seguintes gramáticas livres de contexto construa gramáticas equivalentes com símbolo de variável inicial não-recursivo essencialmente não-contráteis e sem regras de renomeamento de variáveis.
   (a)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aS|bS|B \\ B \to bb|C|\lambda \\ C \to cC|\lambda \end{array}$$

   (b)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to AB|BCS \\ A \to aA|C \\ B \to bbB|b \\ C \to cC|\lambda \end{array}$$

10. Elimine os símbolos inutéis das seguintes gramáticas livres de contexto.
   (a)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aA|BD \\ A \to aA|aAB|aD \\ B \to aB|aC|BF \\ C \to Bb|aAC|E \\ D \to bD|bC|b \\ E \to aB|bC \\ F \to aF|aG|a \\ G \to a|b \end{array}$$

   (b)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to A|CB \\ A \to D|C \\ B \to bB|b \\ C \to cC|c \\ D \to dD|d \end{array}$$

   Construa uma gramática equivalente à segunda eliminando as regras de renomeamento de variáveise verifique se contém símbolos inutéis.
11. Converta a seguinte gramática livre de contexto (com símbolo de variável inicial não-recursivo, sem λ-regras, sem regras de renomeamento de variáveis e sem símbolos inutéis) na sua forma normal de Chomsky.

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aAbB|ABC|a \\ A \to aA|a \\ B \to bBcC|b \\ C \to abc \end{array}$$

12. Que comprimento têm as derivações de palavras de comprimento n geradas por gramáticas livres de contexto em forma normal de Chomsky e forma normal de Greibach, respectivamente?

    Quais são a mínima e máxima profundidade de árvores de derivação para palavras de comprimento n com gramáticas na forma normal de Chomsky?

13. Converta as seguintes gramáticas em forma normal de Chomsky a sua forma normal de Greibach.

    (a)

$$
\begin{array}{ll}
G: & S \to BB \\
 & A \to AA|a \\
 & B \to AA|BA|b
\end{array}
$$

    (b)

$$
\begin{array}{ll}
G: & S \to AB|BC \\
 & A \to AB|a \\
 & B \to AA|CB|b \\
 & C \to a|b
\end{array}
$$

14. Considere a gramática livre de contexto AE apresentada no texto de Sudkamp para expressões aritméticas:

$$
\begin{array}{ll}
AE: & S \to A \\
 & A \to T|A+T \\
 & T \to b|(A)
\end{array}
$$

    Indique passo a passo como AE pode ser transformada nas Formas Normais de Chomsky e Greibach.

15. Apresente desenhos de Autômatos Finitos Deterministas (DFAs) que aceitem as seguintes linguagens.

    (a) $\{w \mid$ para toda subpalavra u de w com $|u| = 5$ $|u|_0 \geq 2\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$;
    (b) $\{w \mid |w|_0$ par e $|w|_1$ ímpar$\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$;
    (c) $\{w \mid w$ múltiplo de 11 como binário$\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$;
    (d) $\{w \mid w$ não contém ocorrências de 000$\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$;
    (e) $\{w \mid$ toda ocorrência de 0 em w é precedida por uma ocorrência de 1$\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1, 2\}$;
    (f) $\{w \mid$ o número de ocorrências de 01 em w é ímpar$\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1, 2\}$.

16. Considere o NDFA M da figura 1.

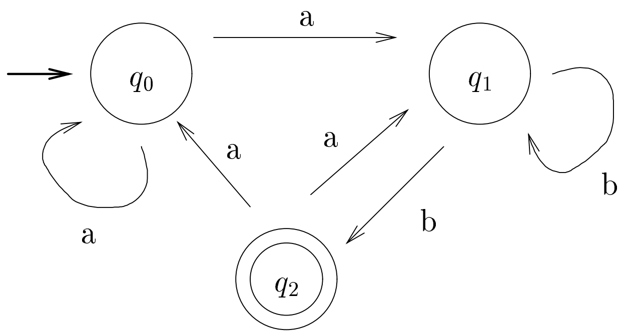

Figura 1: Exercício 16

    (a) Construa a tabela de transições de M.
    (b) Especifique todas as possíveis computações da palavra $aaabb$ em M. $aaabb \in L(M)$?

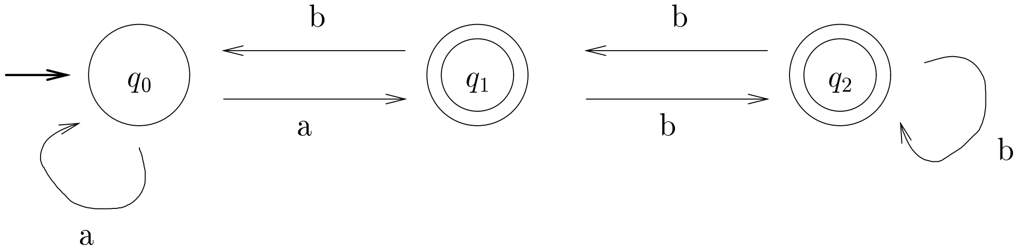

Figura 2: Exercício 17

(c) Forneça uma expressão regular para $L(M)$.

Pode usar o SAGEMoLiC.

17. Considere o NDFA M da figura 2.

    (a) Construa a tabela de transições de M.
    (b) Especifique todas as possíveis computações da palavra $aabb$ em M. $aabb \in L(M)$?
    (c) Forneça uma expressão regular para $L(M)$.
    (d) Construa um DFA que aceite $L(M)$.
    (e) Qual seria a linguagem aceita se os estados finais de M fossem q_0 3 q_1? Forneça uma expressão regular para ista linguagem.

    Pode usar o SAGEMoLiC.

18. Estendendo a idéia de *bidimensionalidade* do DFA apresentada no curso (variação do exemplo 6.3.3 da página 164 do livro de Sudkamp) para três dimensões desenhe um DFA para reconhecer palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ com número par de ocorrências de a, b e c; i. e., a linguagem:

    $L = \{w \mid |w|_a, |w|_b, |w|_c \text{ são números pares}\}$.

19. Construa autômatos finitos para às seguintes expressões regulares:

    (a) $(11 \cup 0)^*(00 \cup 1)^*$;
    (b) $(1 \cup 01 \cup 001)^*(\lambda \cup 0 \cup 00)$;
    (c) $01[((10)^* \cup 111)^* \cup 0]^*1$.

20. Construa autômatos finitos (não-deterministas) que aceitem as seguintes linguagens.

    (a) O conjunto de palavras $w \in \{1, 2, 3\}^*$ tais que $|w|_1 + 2|w|_2 + 3|w|_3$ é divisível por seis.
    (b) O conjunto de palavras $w \in \{0, 1\}^*$ tais que qualquer subpalavra de comprimento 4 tem pelo menos uma ocorrência de 1.

        Observe que por vaziedade toda palavra de comprimento menor ou igual que 3 está na linguagem.
    (c) O conjunto de palavras $w \in \{0, 1\}^*$ que têm ocorrências tanto de 00 como de 11 ou nenhuma.

21. Construa expressões regulares para os autômatos finitos das figuras 3 e 4.

22. Exercício 34 página 193 de Sudkamp.

23. Quais das seguintes linguagens são conjuntos regulares? Justifique suas respostas.

    - $\{0^m 1^n 0^{n+m} \mid n, m \geq 1\}$;
    - $\{0^m \mid m \text{ primo}\}$;
    - $\{x \mid x \in (0 \cup 1)^* \text{ e } x = x^R\}$;

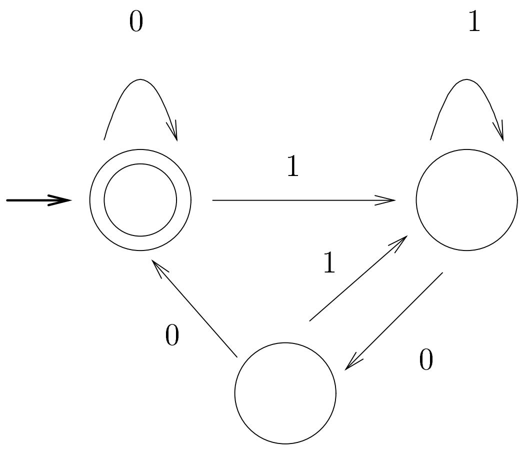

Figura 3: Exercício 21.1

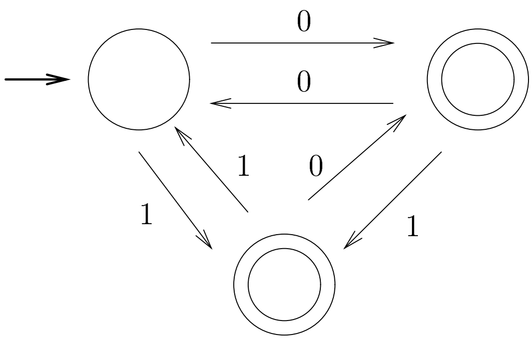

Figura 4: Exercício 21.2

- $\{xwx^R \mid x, w \in (0 \cup 1)^+\}$;
- $\{w \mid w = w^R\}$.

24. Seja L um conjunto regular. Quais das seguintes linguagens são regulares?
    - $L^R = \{x \mid x^R \in L\}$;
    - $\{x \mid xx^R \in L\}$.

25. A transformação de um NDFA em um DFA equivalente incrementa o número de estados substancialmente. Apresente limites inferior e superior para o número de estados no DFA que resulta da transformação de um NDFA com n estados. Veja exercício 3.20, página 73 de Hopcroft & Ullman.