Linguagens Formais e Autômatos
Lista de Exercícios
Fundamentos, Linguagens Regulares, Autômatos Finitos, Gramáticas Livres de Contexto

12 de maio de 1999

Mauricio Ayala-Rincón

Entrega: antes do 25 de maio de 1998. Grupos de máximo quatro pessoas

Fundamentos

1. Use o *princípio dos ninhos de pomba* para demonstrar que a expansão decimal de um número racional arbitrário é finita ou periódica. P. ex. $1/3 = 0,333333...$; $1/7 = 142857142857142857....$

2. (a) Demonstre que a união enumerável de uma família enumerável de conjuntos (finita ou infinita) é enumerável.
   (b) Demonstre que o conjunto dos subconjuntos finitos de $I\!N$ é enumerável.
   (c) Demonstre que o conjunto de reais no interválo $[0..1]$ não é enumerável.
   (d) Demonstre que o conjunto de funções totais de $I\!N$ a $\{0,1\}$ não é enumerável.

3. Sejam A e B conjuntos finitos. Demonstre que existem $|B|^{|A|}$ possíveis funções entre A e B.

Linguagens Regulares e Autômatos Finitos

4. Escreva expressões regulares para as seguintes linguagens sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.
   - $\{w \mid |w|_a \leq 3\}$
   - $\{w \mid |w|_a$ divisível por $3\}$
   - $\{w \mid aaa$ é subpalavra de w com exatamente uma ocorrência$\}$
   - $\{w \mid |w|_a$ e $|w|_b$ são ambas ímpares$\}$
   - a linguagem das palavras tais que qualquer ocorrência de aa aparece antes de qualquer ocorrência de bb
   - A linguagem das palavras que não contém ocorrências de aba

5. Construa diagramas de estados de autômatos de estados finitos deterministas (DFAs) que aceitem as linguagens correspondentes às seguintes expressões regulares
   (a) a^*b
   (b) $b^*(ab)^+$
   (c) $(a|b)^*b(a|b)^*a(a|b)^*$

6. Apresente diagramas de estados de DFAs que aceitem as seguintes linguagens
   (a) $\{w \mid$ para toda subpalavra u de w com $|u| = 5$ $|u|_0 \geq 2\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$;
   (b) $\{w \mid |w|_0$ par e $|w|_1$ ímpar$\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$;
   (c) $\{w \mid w$ múltiplo de 11 como binário$\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$;
   (d) $\{w \mid w$ não contém ocorrências de $000\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$;
   (e) $\{w \mid$ toda ocorrência de 0 em w é precedida por uma ocorrência de $1\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1, 2\}$;
   (f) $\{w \mid$ o número de ocorrências de 01 em w é ímpar$\}$ sobre $\Sigma = \{0, 1, 2\}$.

7. Estendendo a idéia de *bidimensionalidade* do DFA apresentada na aula (variação do exemplo 6.3.3 da página 164 do livro de Sudkamp) para três dimensões apresente o diagrama de estados de um DFA para reconhecer palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ com número par de ocorrências de a, b e c; i. e., a linguagem:

$$L = \{w \mid |w|_a, |w|_b, |w|_c \text{ são números pares}\}$$

8. Construa (dois) DFAs para reconhecer a linguagem dos naturais divisíveis por cinco (i.e., $L = \{n \mid n \in I\!N, n \equiv 0 \text{ MOD } 5\}$) usando
   (a) alfabeto decimal, $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e
   (b) alfabeto binário, $\Sigma = \{0, 1\}$, para representar os naturais.

9. Construa autômatos de estados finitos não-deterministas (NDFAs) que aceitem as seguintes linguagens
   (a) O conjunto de palavras $w \in \{1, 2, 3\}^*$ tais que $|w|_1 + 2|w|_2 + 3|w|_3$ é divisível por seis.
   (b) O conjunto de palavras $w \in \{0, 1\}^*$ tais que qualquer subpalavra de comprimento 4 tem pelo menos uma ocorrência de 1.
   Observe que por vaziedade toda palavra de comprimento menor ou igual que 3 está na linguagem.
   (c) O conjunto de palavras $w \in \{0, 1\}^*$ que têm ocorrências tanto de 00 como de 11 ou nenhuma.
   (d) Considere o complemento da linguagem, L, correspondente à expressão regular $(a|b)^*aaa(a|b)^*$. $\overline{L}$ consiste das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ sem ocorrências consecutivas de tês as. Construa DFAs para L e $\overline{L}$.

10. Construa expressões regulares para os autômatos finitos dos desenhos do exercício.

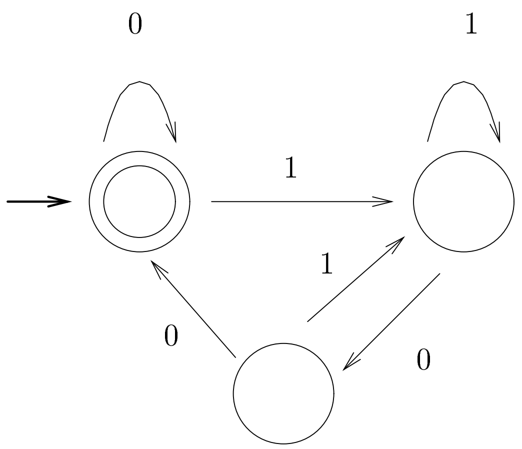

Figura 1: Exercício 10.1

11. Demonstre que a construção sugerida na aula para convertir um DFA que aceita a linguagem L em um DFAs que aceita a linguagem $\overline{L}$, não é correta quando se trata de NDFAs. Aplique a construção a um NDFA de sua escolha, e verifique o que passa com o NFDA resultante.

12. Considere um alfabeto finito Σ. O *reverso*, w^R de uma palavra $w \in \Sigma^*$ é definido recursivamente como segue:
    - se $|w| = 0$ então $w^R = w = \lambda$ (onde λ é a palavra vazia);
    - se não, $w = ua$ para algum $a \in \Sigma$ e $u \in \Sigma^*$ e $w^R = au^R$.

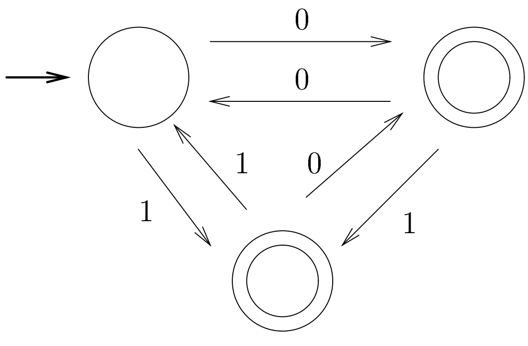

Figura 2: Exercício 10.2

A noção de reverso de uma palavra estende-se da maneira natural para linguagens: seja L uma linguagem sobre Σ; o reverso de L define-se como $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

(a) Demonstre que as linguagens regulares são fechadas sob reverso.
(b) Seja L uma linguagem regular. Demonstre que $L' = \{w \mid w \in L, w^R \in L\}$ é também regular.
(c) Seja L uma linguagem regular. É $\{x \mid xx^R \in L\}$ regular?

13. Quais das seguintes linguagens são conjuntos regulares? Justifique suas respostas.
    (a) $\{0^m 1^n 0^{n+m} \mid n, m \geq 1\}$
    (b) $\{0^m \mid m \text{ primo}\}$
    (c) $\{x \mid x \in (0 \cup 1)^* \text{ e } x = x^R\}$
    (d) $\{xwx^R \mid x, w \in (0 \cup 1)^+\}$
14. A transformação de um NDFA em um DFA equivalente incrementa o número de estados substancialmente. Apresente limites inferior e superior para o número de estados do DFA que resulta da transformação de um NDFA com n estados. Veja exercício 3.20, página 73 de Hopcroft & Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.*

Gramáticas Generativas

15. Construa expressões regulares para as linguagens geradas pelas seguintes gramáticas lineares à esquerda
    (a) $S \to aaA; A \to aaA \mid B; B \to b \mid bB$
    (b) $S \to aaaA \mid A; A \to aaa \mid aaaA \mid B; B \to bb \mid bbB \mid C; C \to c \mid cC \mid \lambda$
16. Aplique o algoritmo de construção de autômatos de estados finitos para a seguinte gramática linear à esquerda

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aX \\ X \to bY \\ Y \to aX \mid bZ \mid b \\ Z \to bZ \mid b \end{array}$$

17. Construa uma gramática para a linguagem $L = \{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$
18. Considere a gramática livre de contexto

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to ASB \mid \lambda \\ A \to aAb \mid \lambda \\ B \to bBa \mid ba \end{array}$$

(a) Apresente derivações *esquerdas* e *direitas* das palavras $aabbba$ e $abaabbbabbaa$.

(b) Descreva a linguagem $L(G)$ em notação de conjuntos.

19. Para cada uma das seguintes gramáticas descreva em notação de conjuntos $L(G)$.

(a)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aaSB \mid \lambda \\ B \to bB \mid b \end{array}$$

(b)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to abSdc \mid A \\ A \to cdAba \mid \lambda \end{array}$$

(c)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aSB \mid aB \\ B \to bb \mid b \end{array}$$

20. Construa gramáticas livres de contexto para gerar as seguintes linguagens.

(a) $\{a^n b^{2n} c^m \mid n, m > 0\}$ sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.

(b) $\{a^n b^m c^{2n+m} \mid n, m > 0\}$ sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.

(c) $\{a^m b^n \mid 0 \leq n \leq m \leq 3n\}$ sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

(d) $\{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

(e) $\{w \mid |w| = n$ ímpar e primeiro e símbolo no meio de w coincidem $\}$ sobre o alfabeto $\{a, b\}$.

21. Para as seguintes gramáticas livres de contexto construa gramáticas equivalentes com símbolo de variável inicial não-recursivo essencialmente não-contráteis e sem regras de renomeamento de variáveis.

(a)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aS \mid bS \mid B \\ B \to bb \mid C \mid \lambda \\ C \to cC \mid \lambda \end{array}$$

(b)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to AB \mid BCS \\ A \to aA \mid C \\ B \to bbB \mid b \\ C \to cC \mid \lambda \end{array}$$

22. Elimine os símbolos inutéis das seguintes gramáticas livres de contexto.

(a)

$$G: \quad \begin{array}{l} S \to aA \mid BD \\ A \to aA \mid aAB \mid aD \\ B \to aB \mid aC \mid BF \\ C \to Bb \mid aAC \mid E \\ D \to bD \mid bC \mid b \\ E \to aB \mid bC \\ F \to aF \mid aG \mid a \\ G \to a \mid b \end{array}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
G: \quad & S \to A \mid CB \\
& A \to D \mid C \\
& B \to bB \mid b \\
& C \to cC \mid c \\
& D \to dD \mid d
\end{aligned}
$$

Construa uma gramática equivalente à segunda eliminando as regras de renomeamento de variáveise verifique se contém símbolos inutéis.

23. Converta a seguinte gramática livre de contexto (com símbolo de variável inicial não-recursivo, sem λ-regras, sem regras de renomeamento de variáveis e sem símbolos inutéis) na sua forma normal de Chomsky.

$$
\begin{aligned}
G: \quad & S \to aAbB \mid ABC \mid a \\
& A \to aA \mid a \\
& B \to bBcC \mid b \\
& C \to abc
\end{aligned}
$$

24. Que comprimento têm as derivações de palavras de comprimento n geradas por gramáticas livres de contexto em forma normal de Chomsky e forma normal de Greibach, respectivamente?

    Quais são a mínima e máxima profundidade de árvores de derivação para palavras de comprimento n com gramáticas na forma normal de Chomsky?

25. Converta as seguintes gramáticas em forma normal de Chomsky a sua forma normal de Greibach.

    (a)

$$
\begin{aligned}
G: \quad & S \to BB \\
& A \to AA \mid a \\
& B \to AA \mid BA \mid b
\end{aligned}
$$

    (b)

$$
\begin{aligned}
G: \quad & S \to AB \mid BC \\
& A \to AB \mid a \\
& B \to AA \mid CB \mid b \\
& C \to a \mid b
\end{aligned}
$$