Lógica Computacional
Gabarito da Primeira Prova

Tópicos: Lógica proposicional
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
05 de outubro de 2009
Prof. Mauricio Ayala-Rincón

Dedução natural

1. (4.0 pontos) Considere a seguinte dedução Γ_1 da regra de contra posição:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Delta}{p\lor\neg p}\qquad \dfrac{[\neg p]^x}{\neg q\to\neg p}\,{\to}i,\emptyset \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg q]^z \qquad \dfrac{[p]^y\quad[p\to q]^u}{q}\,{\to}e}{\bot}\,\neg e}{\neg p}\,\bot e}{\neg q\to\neg p}\,{\to}i,z}{\neg q\to\neg p}\,\lor e,x,y}{(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)}\,{\to}i,u$$

   (a) (2.0) Complete a dedução, apresentando uma árvore de dedução natural Δ da lei do meio excluído; i.e., uma dedução de $p\lor\neg p$.
   R/

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(p\lor\neg p)]^l \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(p\lor\neg p)]^l \qquad \dfrac{[p]^m}{p\lor\neg p}\,\lor i}{\bot}\,\neg e}{\neg p}\,\neg i,m}{p\lor\neg p}\,\lor i}{\bot}\,\neg e}{p\lor\neg p}\,\text{PBC},l$$

   (b) (2.0) Apresente uma árvore de dedução natural Γ_2 do recíproco:

$$\vdash(\neg q\to\neg p)\to(p\to q)$$

   R/

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Delta}{q\lor\neg q}\qquad \dfrac{[q]^x}{p\to q}\,{\to}i,\emptyset \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^z \qquad \dfrac{[\neg q\to\neg p]^u\quad[\neg q]^y}{\neg p}\,{\to}e}{\bot}\,\neg e}{q}\,\bot e}{p\to q}\,{\to}i,z}{p\to q}\,\lor e,x,y}{(\neg q\to\neg p)\to(p\to q)}\,{\to}i,u$$

2. (2.0 pontos) Considere a seguinte agrumentação sobre a correção da Lei de Peirce tomada da Wikipedia:

   Para mostrar que a implicação $((A\to B)\to A)\to A$ é válida supõe-se, por absurdo, que ela é falsa, isto é, $\neg(((A\to B)\to A)\to A)$. Portanto, $((A\to B)\to A)$ é verdadeira e A é falsa, de donde, $A\to B$ é falsa, e portanto A é verdadeira, o que resulta em um absurdo.
   Conclui-se que $((A\to B)\to A)\to A$.

Construir-se-á uma árvore de dedução natural traduzindo a argumentação precedente. P.ex., *"Portanto, $((A \to B) \to A)$ é verdadeira e A é falsa, de donde, $A \to B$ é falsa"* pode ser expressa na seguinte dedução, Π_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B]^u \qquad (A \to B) \to A}{A}\to e \qquad \neg A}{\bot}\neg e}{\neg(A \to B)}\neg i, u$$

E a seguir, *", e portanto A é verdadeira"*, na seguinte árvore de dedução, Π_2:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \neg(A \to B)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{[\neg A]^v}{\neg B \to \neg A}\to i, \emptyset\\ \Gamma_2(\text{item 1b})\\ A \to B\end{array}}{\bot}\neg e}{A}\text{PBC}, v$$

Utilizando as deduções Π_1 e Π_2 e deduções Π_3 e Π_4 de que *"se $\neg(((A \to B) \to A) \to A)$ então $((A \to B) \to A)$ é verdadeira e A é falsa"*, a saber:

$$\begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w\\ \Pi_3\\ (A \to B) \to A\end{array}$$

e

$$\begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w\\ \Pi_4\\ \neg A\end{array}$$

Pode-se obter a dedução da Lei de Peirce, por contradição:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w\\ \Pi_4\\ \neg A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w\\ \Pi_3\\ (A \to B) \to A\end{array} \quad \begin{array}{c}[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w\\ \Pi_4\\ \neg A\end{array}\\ \Pi_1\\ \neg(A \to B)\\ \Pi_2\\ A\end{array}}{\bot}\neg e}{((A \to B) \to A) \to A}\text{PBC}, w$$

Complete a dedução construíndo árvores de dedução natural para

(a) (1.0) Π_3 e

R/

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w \qquad \begin{array}{c}\dfrac{[\neg((A \to B) \to A)]^x}{\neg A \to \neg((A \to B) \to A)}\to i, \emptyset\\ \Gamma_2(1b)\\ ((A \to B) \to A) \to A\end{array}}{\bot}\neg e}{(A \to B) \to A}\text{PBC}, x$$

(b) (1.0) Π_4.

R/

$$\dfrac{[\neg(((A \to B) \to A) \to A)]^w \quad \dfrac{[A]^y}{((A \to B) \to A) \to A} \to i, \emptyset}{\dfrac{\bot}{\neg A} \neg i, y} \neg e$$

SEMÂNTICA

3. (4.0 pontos)

(a) (1.0) Construa uma fórmula em forma normal conjuntiva equivalente à Lei de Peirce

$$((A \to B) \to A) \to A$$

Utilize os algoritmos específicos para esta tarefa descritos no texto da disciplina.

R/

$$\begin{array}{l}
\text{CNF(NNF(IMPL_FREE}(((A \to B) \to A) \to A))) = \\
\ldots\text{(todos os passos devem ser includídos na resposta)} \\
\text{CNF(NNF}(\neg(\neg(\neg A \vee B) \vee A) \vee A) \\
\ldots\text{(todos os passos devem ser includídos na resposta)} \\
\text{CNF}(((\neg A \vee B) \wedge \neg A) \vee A) \\
\ldots\text{(todos os passos devem ser includídos na resposta)} \\
(\neg A \vee B \vee A) \wedge (\neg A \vee A)
\end{array}$$

(b) (3.0) Utilize a técnica de solucionador SAT para demonstrar que a Lei de Pierce é válida; i.e., demonstre que a negação da Lei de Pierce é insatisfazível:

i. (1.0) Transforme a negação da Lei de Pierce numa fórmula equivalente no fragmento negativo-conjuntivo da lógica proposicional, utilizando o operador T;

R/

$$\begin{array}{l}
T(\neg(((A \to B) \to A) \to A)) = \\
\ldots \\
\neg\neg(T((A \to B) \to A) \wedge \neg A) = \\
\ldots \\
\neg\neg(\neg(T(A \to B) \wedge \neg A) \wedge \neg A) = \\
\ldots \\
\neg\neg(\neg(\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg A) \wedge \neg A)
\end{array}$$

ii. (1.0) Construa um DAG para esta fórmula;

R/ Veja Figura 1.

iii. (1.0) Utilizando a técnica de solucionadores SAT, demonstre que está fórmula é insatisfazível.

R/ Veja Figura 2.

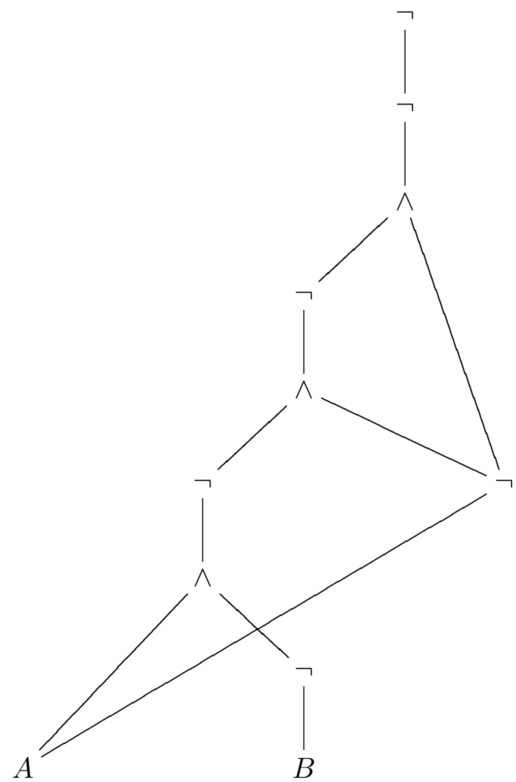

Figure 1: DAG para $\neg\neg(\neg(\neg(A \land \neg B) \land \neg A) \land \neg A)$

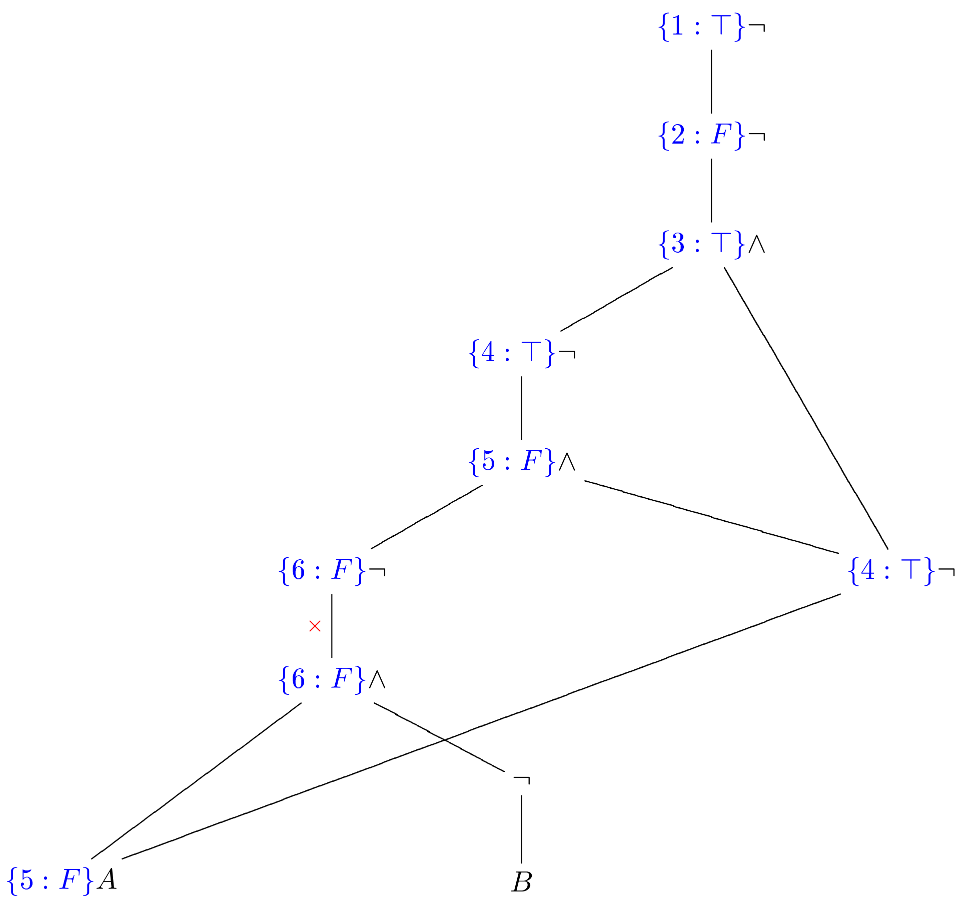

Figure 2: Verificação da (in)satisfazibilidade de $\neg\neg(\neg(\neg(A \land \neg B) \land \neg A) \land \neg A)$