Lógica Computacional
Gabarito da Primeira Prova

Tópicos: Lógica proposicional
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
23 de junho de 2010
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Monitor: André Figueira Lourenço

Nome:	Matrícula:

Duração: 100 min.
<u>Inicio</u>: 16:00; <u>Fim</u>: 17:45
Duas Páginas, três questões

Dedução natural

1. (4.0 pontos) Considere a seguinte dedução de $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$.

$$\Gamma_1 = \left\{ \dfrac{\dfrac{\neg p \vee \neg q \qquad \dfrac{\dfrac{[p\wedge q]^u}{p}\wedge e_1 \quad [\neg p]^x}{\bot}\neg e \qquad \dfrac{\dfrac{[p\wedge q]^u}{q}\wedge e_2 \quad [\neg q]^y}{\bot}\neg e}{\bot}\vee e, x, y}{\neg(p\wedge q)}\neg i, u \right.$$

Construa deduções da seguinte versão de uma das Leis de De Morgan:

$$\neg(\neg p \vee \neg q) \dashv\vdash p \wedge q$$

(a) (2.0 pontos) Constua uma prova por dedução natural, indicando o nome das regras utilizadas e as suposições descarregadas, de

$$\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$$

Pode-se derivar o absurdo de supor $\neg p$, assim como de supor $\neg q$. Dessa forma poderá derivar-se tanto p como q.
R/

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg p \vee \neg q) \qquad \dfrac{[\neg p]^u}{\neg p \vee \neg q}\vee_i}{\bot}\neg_e}{p}PBC, u \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\neg p \vee \neg q) \qquad \dfrac{[\neg q]^v}{\neg p \vee \neg q}\vee_i}{\bot}\neg_e}{q}PBC, v}{p \wedge q}\wedge_i$$

(b) (2.0 pontos) Constua uma prova por dedução natural, indicando o nome das regras utilizadas e as suposições descarregadas, de

$$p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)$$

Pode-se utilizar a dedução Γ_1, para obter uma prova de $\vdash (\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$ e, logo aplicar *Modus Tollens* desta última fórmula com $\neg\neg(p \wedge q)$.

R/

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg p \vee \neg q]^x \\ \Gamma_1 \\ \neg(p \wedge q)\end{matrix}}{(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)} \to_i, x \qquad \dfrac{\dfrac{(p \wedge q) \qquad [\neg(p \wedge q)]^y}{\bot} \neg_e}{\neg\neg(p \wedge q)} \neg_i, y}{\neg(\neg p \vee \neg q)} MT$$

Semântica

2. (3.0 pontos) Lembre que o operador T utilizado no método de SAT é definido como:

$T(p) = p$	$T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$
$T(\phi_1 \wedge \phi_2) = T(\phi_1) \wedge T(\phi_2)$	$T(\phi_1 \vee \phi_2) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$
$T(\phi_1 \to \phi_2) = \neg(T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$	

Deseja-se demonstrar que este operador é correto; i.e., que para qualquer fórmula ϕ,

$$\phi \equiv T(\phi)$$

ou, em outras palavras, que para qualquer designação de valores de verdade das variáveis que ocorrem em ϕ, o valor de verdade de ϕ e de $T(\phi)$ é o mesmo.

Para isto é necessário completar a demonstração por indução na estrutura dos termos embaixo.

Prova indutiva de que T é uma transformação correta: para toda ϕ, $\phi \equiv T(\phi)$.

Base da Indução. $\boldsymbol{\phi = p}$, uma variável proposicional. Por definição $T(p) = p$. Dessa forma, $p \equiv T(p)$.

Passo da Indução.

Caso negação: $\boldsymbol{\phi = \neg\phi_1}$. Por hipótese de indução, $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$, já que ϕ_i é sub fórmula de ϕ. Assim, $\neg\phi_1 \equiv \neg T(\phi_1)$, mas por definição $T(\neg\phi_1) = \neg T(\phi_1)$. Logo, $\neg\phi_1 \equiv T(\neg\phi_1)$.

Caso conjunção: $\boldsymbol{\phi = \phi_1 \wedge \phi_2}$. Por hipótese de indução, $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$ e $\phi_2 \equiv T(\phi_2)$, já que ϕ_i e ϕ_2 são sub fórmulas de ϕ. Sempre que $T(\phi_1 \wedge \phi_2) = T(\phi_1) \wedge T(\phi_2)$, obtem-se $\phi_1 \wedge \phi_2 \equiv T(\phi_1) \wedge T(\phi_2)$.

(a) (1.5 pontos) Caso disjunção: $\boldsymbol{\phi = \phi_1 \vee \phi_2}$. Provar $\phi_1 \vee \phi_2 \equiv T(\phi_1 \vee \phi_2)$.

R/ Por hipótese de indução, $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$ e $\phi_2 \equiv T(\phi_2)$, já que ϕ_i e ϕ_2 são sub fórmulas de ϕ. Por definição

$$T(\phi_1 \vee \phi_2) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$$

Para qualquer designação de valores de verdade das variáveis em ϕ, ϕ_1 e ϕ_2 tem valor de verdade T ou F, e esses valores coincidem, respectivamente, com os valores de $T(\phi_1)$ e $T(\phi_2)$, por hipótese de indução. Dessa forma, basta comparar uma tabela de valores de verdade para as fórmulas ϕ e $T(\phi)$:

$\phi_1 = T(\phi_1)$	$\phi_2 = T(\phi_2)$	$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$	$\neg T(\phi_1)$	$\neg T(\phi_2)$	$T(\phi) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T

Assim, $\phi \equiv T(\phi)$.

(b) (1.5 pontos) Caso implicação: $\boldsymbol{\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2}$. Provar $\phi_1 \rightarrow \phi_2 \equiv T(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$.

R/ Por hipótese de indução, $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$ e $\phi_2 \equiv T(\phi_2)$, já que ϕ_i e ϕ_2 são sub fórmulas de ϕ. Por definição

$$T(\phi_1 \rightarrow \phi_2) = \neg(T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$$

$\phi_1 = T(\phi_1)$	$\phi_2 = T(\phi_2)$	$\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$	$\neg T(\phi_2)$	$T(\phi) = \neg(T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Assim, $\phi \equiv T(\phi)$.

Observe que para completar a prova dos últimos dois itens, pode-se supor a hipótese de indução (i.e., $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$ e $\phi_2 \equiv T(\phi_2)$) e trabalhar com tabelas de verdade.

Satisfazibilidade

3. (3.0 pontos) Utilize a técnica de solucionador SAT para demonstrar que a Lei de De Morgan

$$(p \wedge q) \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

do exercício 1 é válida; i.e., demonstre que a sua negação, $\neg((p \wedge q) \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q))$, é insatisfazível, conforme o seguinte roteiro:

(a) (0.5) Apresente todos os passos da aplicação da transformação T à negação da Lei de De Morgan acima de forma a obter a fórmula equivalente no fragmento negativo-conjuntivo da lógica proposicional embaixo:

$$\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q))$$

R/

$$\begin{aligned}
&T(\neg((p \wedge q) \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q))) = \\
&\neg T((p \wedge q) \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)) = \\
&\neg\neg(T(p \wedge q) \wedge \neg T(\neg(\neg p \vee \neg q))) = \\
&\neg\neg((T(p) \wedge T(q)) \wedge \neg T(\neg(\neg p \vee \neg q))) =^2 \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg T(\neg(\neg p \vee \neg q))) = \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg T(\neg p \vee \neg q)) = \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg T(\neg p) \wedge \neg T(\neg q))) =^2 \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg T(p) \wedge \neg\neg T(q))) =^2 \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q))
\end{aligned}$$

(b) (0.5) Construa um DAG para esta fórmula;

R/ Veja figura 1.

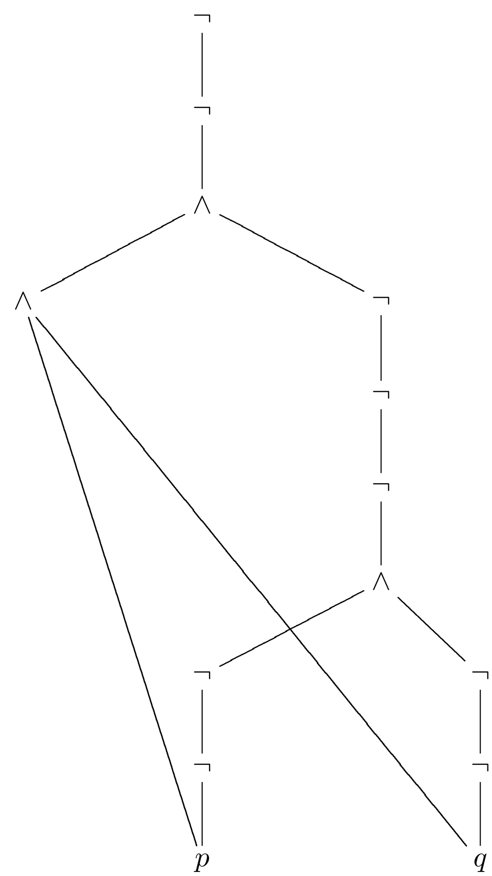

Figure 1: DAG para $\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q))$

(c) (2.0) Utilizando a técnica de solucionadores SAT, demonstre que está fórmula é insatisfazível.

R/ Aplicando o método SAT na figura 1, obtem-se uma contradição na oitava iteração (veja figura 2), o que implica a insatisfazibilidade da negação da fórmula.

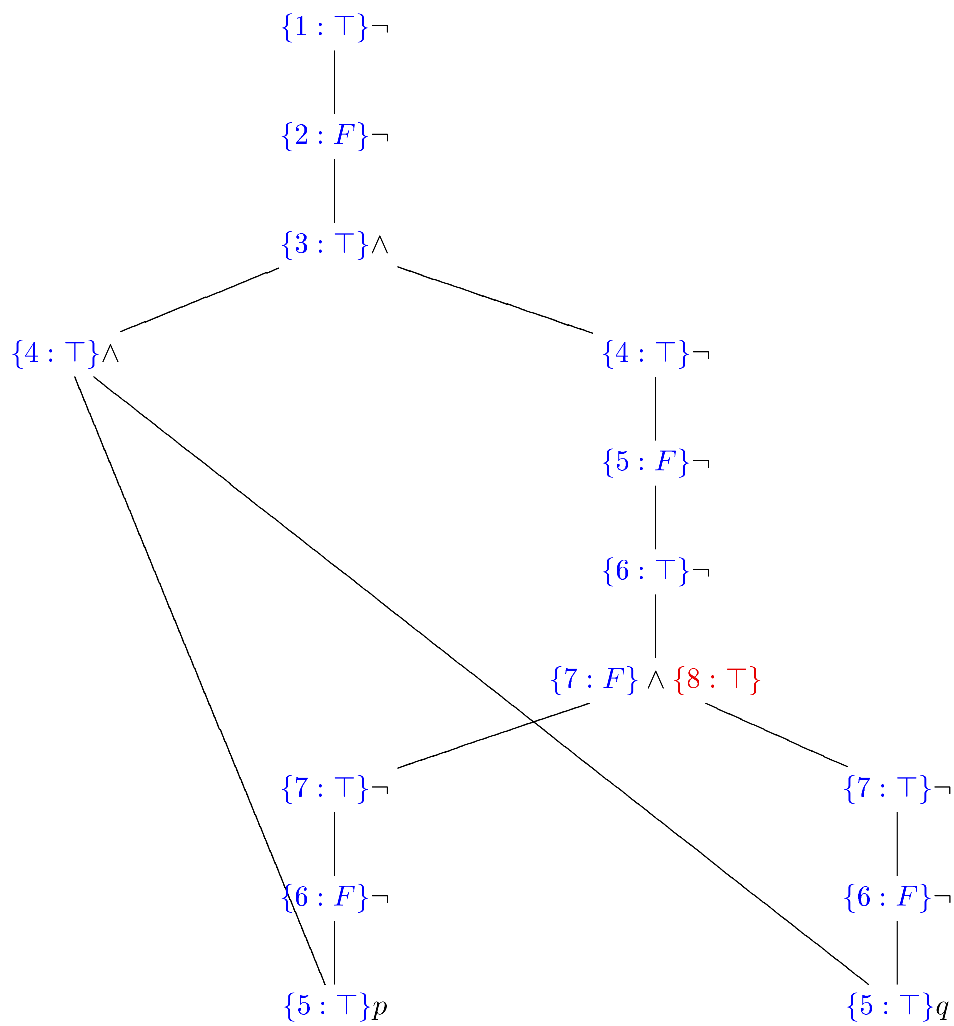

Figure 2: Verificação da (in)satisfazibilidade de $\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q))$