Lógica Computacional
Gabarito da Primeira Prova

Tópicos: Lógica proposicional
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
24 de novembro de 2010
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Monitor: André Figueira Lourenço

Nome:	Matrícula:

Duração: 100 min.
<u>Inicio</u>: 16:00; <u>Fim</u>: 17:45
Duas Páginas, três questões

Dedução natural

1. (4.0 pontos) Construa deduções da seguinte versão de uma das Leis de De Morgan:

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \dashv\vdash p \vee q$$

(a) (2.0 pontos) Construa uma prova por dedução natural, indicando o nome das regras utilizadas e as suposições descarregadas, de

$$p \vee q \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

R/

$$\cfrac{\cfrac{p \vee q \qquad \cfrac{\cfrac{[\neg p \wedge \neg q]^u}{\neg p}\,\wedge e_1 \qquad [p]^x}{\bot}\,\neg e \qquad \cfrac{\cfrac{[\neg p \wedge \neg q]^u}{\neg q}\,\wedge e_2 \qquad [q]^y}{\bot}\,\neg e}{\bot}\,\vee e, x, y}{\neg(\neg p \wedge \neg q)}\,\neg i, u$$

(b) (2.0 pontos) Construa uma prova por dedução natural, indicando o nome das regras utilizadas e as suposições descarregadas, de

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \vdash p \vee q$$

R/

$$\cfrac{\cfrac{}{q \vee \neg q}\,LEM \qquad \cfrac{[q]^x}{p \vee q}\,\vee i \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg(\neg p \wedge \neg q) \qquad \cfrac{[\neg p]^u \qquad [\neg q]^y}{\neg p \wedge \neg q}\,\wedge i}{\bot}\,\neg e}{p}\,PBC, u}{p \vee q}\,\vee i}{p \vee q}\,\vee e, x, y$$

Semântica

2. (3.0 pontos) Dado um sequente $\phi \vdash \psi$, podemos verificar sua validade de duas formas, com duas etapas cada:

   (a) Determinando que

      i. $\phi \to \psi$ é uma tautologia e,

      ii. então, concluindo que o sequente $\vdash \phi \to \psi$ é válido.

   (b) Determinando que

      i. $\neg(\phi \to \psi)$ não é satisfatível e,

      ii. então, concluindo que $\vdash \phi \to \psi$ é válida.

   Utilizando tabelas de verdade e os teoremas de Correção/Completude, **decida** e **justifique** a validade dos sequentes abaixo:

   (a) (1.5 pontos) $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$ através do método **??**. Discrimine, na sua resposta, os dois passos deste método.
   R/ Seguindo o método $i)$ temos: $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$. Podemos, então, construir a tabela de verdade, considerando $\phi \to \psi : (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$:

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$\phi \to \psi$
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T

   Como $\phi \to \psi$ possui todas as suas avaliações T, podemos concluir que $\vDash \phi \to \psi$ é válido, isto é, $\phi \to \psi$ é uma tautologia (1). Assim, pelo Teorema da Completude, concluímos que $\vdash \phi \to \psi$ é válido (2).

   (b) (1.5 pontos) $\neg(p \to q) \vdash q \to p$ através do método **??**. Discrimine, na sua resposta, os dois passos deste método.
   R/ Seguindo o método $ii)$ temos: $\vdash \neg(\neg(p \to q) \to (q \to p))$. Podemos, então, construir a tabela de verdade, considerando $\neg(\phi \to \psi) : \neg(\neg(p \to q) \to (q \to p))$:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$q \to p$	$\neg(\phi \to \psi)$
T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

   Como $\neg(\phi \to \psi)$ possui todas as suas avaliações F, podemos concluir que $\vDash \neg(\phi \to \psi)$ não é satisfatível (1). No entanto, $\phi \to \psi$ possui todas as suas avaliações T, logo $\vDash \phi \to \psi$ é válida. Assim, pelo Teorema da Completude, concluímos que $\vdash \phi \to \psi$ é válida (2).

Satisfazibilidade

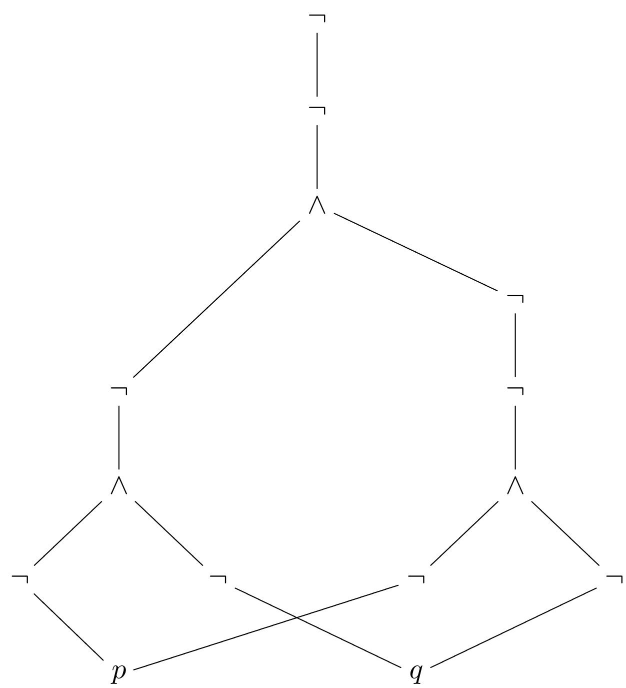

Figure 1: DAG para $\neg\neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg\neg\neg(\neg p \wedge \neg q))$

3. (3.0 pontos) Utilize a técnica de solucionador SAT para demonstrar que a Lei de De Morgan

$$(p \vee q) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

do exercício **??** é válida; i.e., demonstre que a sua negação, $\neg((p \vee q) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q))$, é insatisfazível, conforme o seguinte roteiro:

(a) (0.5) Apresente todos os passos da aplicação da transformação T à negação da Lei de De Morgan acima de forma a obter a fórmula equivalente no fragmento negativo-conjuntivo da lógica proposicional embaixo:

$$\neg\neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg\neg\neg(\neg p \wedge \neg q))$$

R/

$$\begin{aligned}
&T(\neg((p \vee q) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q))) = \\
&\neg T((p \vee q) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)) = \\
&\neg\neg(T(p \vee q) \wedge \neg T(\neg(\neg p \wedge \neg q))) = \\
&\neg\neg(\neg(\neg T(p) \wedge \neg T(q)) \wedge \neg\neg\neg T(\neg p \wedge \neg q)) = \\
&\neg\neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg\neg(T(\neg p) \wedge T(\neg q)) = \\
&\neg\neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg\neg(\neg T(p) \wedge \neg T(q)) = \\
&\neg\neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg\neg(\neg p \wedge \neg q))
\end{aligned}$$

(b) (0.5) Construa um DAG para esta fórmula;
R/ Veja figura **??**.

(c) (2.0) Utilizando a técnica de solucionadores SAT, demonstre que está fórmula é insatisfazível.

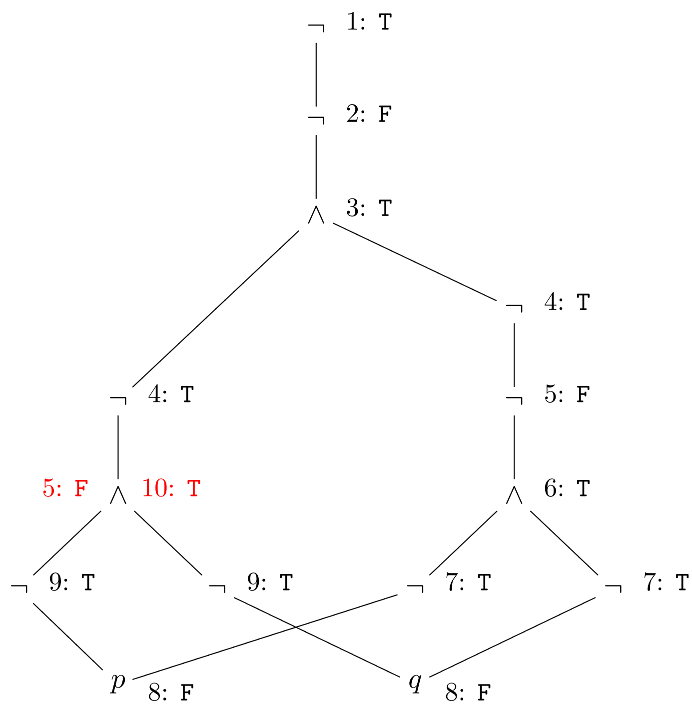

Figure 2: Verificação da insatisfazibilidade de $\neg\neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg\neg(\neg p \wedge \neg q))$

R/ Aplicando o método SAT na figura **??**, obtem-se uma contradição na décima iteração (veja figura **??**), o que implica a insatisfazibilidade da negação da fórmula.