Lógica Computacional
Gabarito da Primeira Prova

Tópicos: Lógica proposicional
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
17 de Outubro de 2011
Prof. Mauricio Ayala-Rincón

Nome:	Matrícula:

Duração: 100 min.
<u>Inicio</u>: 16:00; <u>Fim</u>: 17:45
Duas Páginas, três questões

Dedução natural

1. (5.0 pontos) Deseja-se constroir uma árvore de dedução natural para o sequente

$$(p \to q) \to r, \;\; r \to p \vdash p \wedge (q \to r)$$

Além das regras de derivação usuais, podem ser utilizadas as seguintes regras derivadas de *contraposição*:

$$\frac{\neg\psi \to \neg\phi}{\phi \to \psi}\ (ctrp) \qquad\qquad \frac{\psi \to \phi}{\neg\phi \to \neg\psi}\ (ctrp)$$

Aplique regras de eliminação da disjunção para $r \wedge \neg r$, $q \wedge \neg q$ e $p \wedge \neg p$, conforme o esquema embaixo:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_0}{(r \vee \neg r)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[r]^x\\ \Gamma_1\end{array}}{p \wedge (q \to r)} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_0}{(q \vee \neg q)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg r]^y, [q]^u\\ \Gamma_2\end{array}}{p \wedge (q \to r)} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_0}{(p \vee \neg p)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg r]^y, [\neg q]^u, [p]^l\\ \Gamma_3\end{array}}{p \wedge (q \to r)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg r]^y, [\neg q]^u, [\neg p]^l\\ \Gamma_3\end{array}}{p \wedge (q \to r)}}{p \wedge (q \to r)}\ \vee_e, m, l}{p \wedge (q \to r)}\ \vee_e, u, v}{p \wedge (q \to r)}\ \vee_e, x, y$$

(a) (1.0 ponto) Apresente uma árvore de dedução natural para Γ_0, i.e., (LEM): $\vdash p \vee \neg p$.

(b) (1.0 ponto) Apresente uma árvore de dedução natural para Γ_1; i.e., para

$$(p \to q) \to r, \;\; r \to p, \;\; r \vdash p \wedge (q \to r).$$

(c) (1.0 ponto) Da mesma forma, apresente uma árvore de dedução natural para Γ_2.

(d) (1.0 ponto) Apresente então uma árvore de dedução natural para Γ_3.

(e) (1.0 ponto) Finalmente, para completar a árvore, apresente uma árvore de dedução natural para Γ_4.

R/

(a) Γ_0:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^x}{p \vee \neg p}\vee_i \quad [\neg(p \vee \neg p)]^z}{\bot}\neg_e}{\neg p}\neg_i, x}{r \vee \neg r}\vee_i \qquad [\neg(p \vee \neg p)]^z}{\bot}\neg_e}{p \vee \neg p}\; PBC, z$$

(b) Γ_1:

$$\dfrac{\dfrac{[r]^x}{q \to r}\to_i, \emptyset \qquad \dfrac{[r]^x \quad r \to p}{p}\to_e}{p \wedge (q \to r)}\wedge_i$$

(c) Γ_2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[q]^u}{p \to q}\to_i, \emptyset \quad (p \to q) \to r}{r}\to_e \quad [\neg r]^y}{\bot}\neg_e}{p \wedge (q \to r)}\bot_e$$

(d) Γ_3:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg q]^v}{\neg r \to \neg q}\to_i, \emptyset}{q \to r}\, ctrp \qquad [p]^l}{p \wedge (q \to r)}\wedge_i$$

(e) Γ_4:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]^m}{\neg q \to \neg p}\to_i, \emptyset}{p \to q}\, ctrp \quad (p \to q) \to r}{r}\to_e \quad [\neg r]^y}{\bot}\neg_e}{p \wedge (q \to r)}\bot_e$$

Semântica

2. (2.0 pontos) Lembre que o operador T utilizado no método de SAT é definido como:

$T(p) = p$	$T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$
$T(\phi_1 \wedge \phi_2) = T(\phi_1) \wedge T(\phi_2)$	$T(\phi_1 \vee \phi_2) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$
$T(\phi_1 \to \phi_2) = \neg(T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$	

Deseja-se demonstrar que este operador é correto; i.e., que para qualquer fórmula ϕ,

$$\phi \equiv T(\phi)$$

ou, em outras palavras, que para qualquer designação de valores de verdade das variáveis que ocorrem em ϕ, o valor de verdade de ϕ e de $T(\phi)$ é o mesmo.

Para isto é necessário completar a demonstração por indução na estrutura dos termos embaixo.

Prova indutiva de que T é uma transformação correta: para toda ϕ, $\quad \phi \equiv T(\phi)$.

Base da Indução. $\boldsymbol{\phi = p}$, uma variável proposicional. Por definição $T(p) = p$. Dessa forma, $p \equiv T(p)$.

Passo da Indução.

Caso negação: $\boldsymbol{\phi = \neg\phi_1}$. Por hipótese de indução, $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$, já que ϕ_1 é sub fórmula de ϕ. Assim, $\neg\phi_1 \equiv \neg T(\phi_1)$, mas por definição $T(\neg\phi_1) = \neg T(\phi_1)$. Logo, $\neg\phi_1 \equiv T(\neg\phi_1)$.

Caso conjunção: $\boldsymbol{\phi = \phi_1 \wedge \phi_2}$. Por hipótese de indução, $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$ e $\phi_2 \equiv T(\phi_2)$, já que ϕ_i e ϕ_2 são sub fórmulas de ϕ. Sempre que $T(\phi_1 \wedge \phi_2) = T(\phi_1) \wedge T(\phi_2)$, obtem-se $\phi_1 \wedge \phi_2 \equiv T(\phi_1) \wedge T(\phi_2)$.

(a) (1.0 ponto) Caso disjunção: $\boldsymbol{\phi = \phi_1 \vee \phi_2}$. Provar $\underline{\phi_1 \vee \phi_2 \equiv T(\phi_1 \vee \phi_2)}$.
R/ Por hipótese de indução, $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$ e $\phi_2 \equiv T(\phi_2)$, já que ϕ_i e ϕ_2 são sub fórmulas de ϕ. Por definição

$$T(\phi_1 \vee \phi_2) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$$

Para qualquer designação de valores de verdade das variáveis em ϕ, ϕ_1 e ϕ_2 tem valor de verdade T ou F, e esses valores coincidem, respectivamente, com os valores de $T(\phi_1)$ e $T(\phi_2)$, por hipótese de indução. Dessa forma, basta comparar uma tabela de valores de verdade para as fórmulas ϕ e $T(\phi)$:

$\phi_1 = T(\phi_1)$	$\phi_2 = T(\phi_2)$	$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$	$\neg T(\phi_1)$	$\neg T(\phi_2)$	$T(\phi) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T

Assim, $\phi \equiv T(\phi)$.

(b) (1.0 ponto) Caso implicação: $\boldsymbol{\phi = \phi_1 \to \phi_2}$. Provar $\underline{\phi_1 \to \phi_2 \equiv T(\phi_1 \to \phi_2)}$.
R/ Por hipótese de indução, $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$ e $\phi_2 \equiv T(\phi_2)$, já que ϕ_i e ϕ_2 são sub fórmulas de ϕ. Por definição

$$T(\phi_1 \to \phi_2) = \neg(T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$$

$\phi_1 = T(\phi_1)$	$\phi_2 = T(\phi_2)$	$\phi = \phi_1 \to \phi_2$	$\neg T(\phi_2)$	$T(\phi) = \neg(T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Assim, $\phi \equiv T(\phi)$.

Observe que para completar a prova dos últimos dois itens, pode-se supor a hipótese de indução (i.e., $\phi_1 \equiv T(\phi_1)$ e $\phi_2 \equiv T(\phi_2)$) e trabalhar com tabelas de verdade.

Satisfazibilidade

3. (3.0 pontos) Utilize a técnica de solucionador SAT para demonstrar que a Lei de De Morgan

$$(p \wedge q) \to \neg(\neg p \vee \neg q)$$

é válida; i.e., demonstre que a sua negação, $\neg((p \wedge q) \to \neg(\neg p \vee \neg q))$, é insatisfazível, conforme o seguinte roteiro:

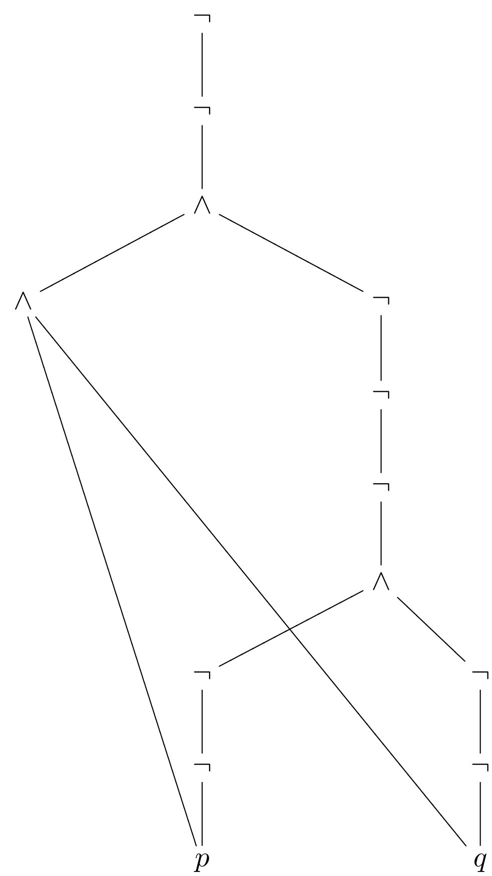

Figure 1: DAG para $\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q))$

(a) (0.5) Apresente todos os passos da aplicação da transformação T à negação da Lei de De Morgan acima de forma a obter a fórmula equivalente no fragmento negativo-conjuntivo da lógica proposicional embaixo:

$$\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q))$$

R/

$$\begin{aligned}
&T(\neg((p \wedge q) \to \neg(\neg p \vee \neg q))) = \\
&\neg T((p \wedge q) \to \neg(\neg p \vee \neg q)) = \\
&\neg\neg(T(p \wedge q) \wedge \neg T(\neg(\neg p \vee \neg q))) = \\
&\neg\neg((T(p) \wedge T(q)) \wedge \neg T(\neg(\neg p \vee \neg q))) =^2 \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg T(\neg(\neg p \vee \neg q))) = \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg T(\neg p \vee \neg q)) = \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg T(\neg p) \wedge \neg T(\neg q))) =^2 \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg T(p) \wedge \neg\neg T(q))) =^2 \\
&\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q))
\end{aligned}$$

(b) (0.5) Construa um DAG para esta fórmula;
R/ Veja figura 1.

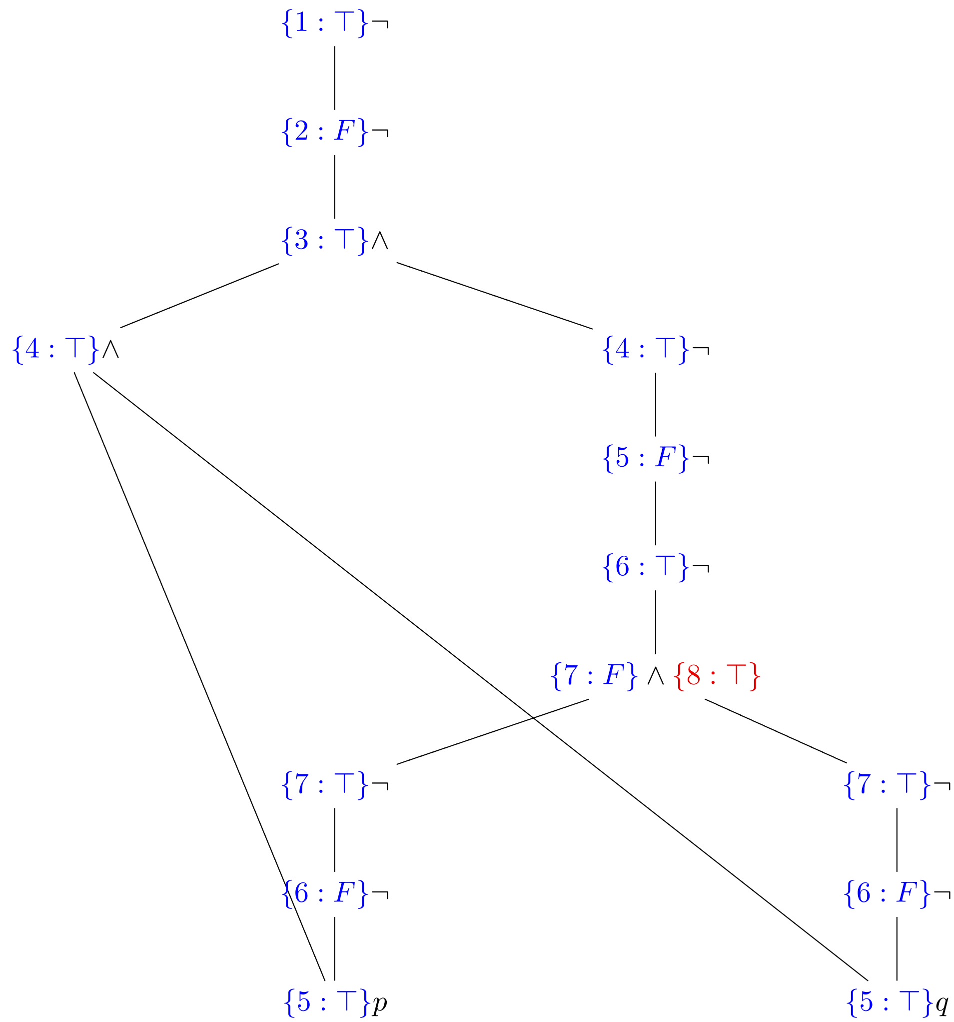

Figure 2: Verificação da (in)satisfazibilidade de $\neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg\neg\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q))$

(c) (2.0) Utilizando a técnica de solucionadores SAT, demonstre que está fórmula é insatisfazível.

R/ Aplicando o método SAT na figura 1, obtem-se uma contradição na oitava iteração (veja figura 2), o que implica a insatisfazibilidade da negação da fórmula.