

LÓGICA COMPUTACIONAL  
 GABARITO DA PRIMEIRA PROVA  
 TÓPICOS: LÓGICA PROPOSICIONAL  
 SEMÂNTICA E DEDUÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
 07 DE MAIO DE 2012  
 PROF. MAURICIO AYALA-RINCÓN  
 BOLSISTA REUNI: HEITOR HENRIQUE DE PAULA MORAES COSTA

DEDUÇÃO NATURAL

Table 1: RULES OF NATURAL DEDUCTION FOR PROPOSITIONAL (CLASSICAL) LOGIC

introduction rules	elimination rules
$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_i)$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e)$
$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee_i)$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^v \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} (\vee_e), u, v$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i), u$	$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow_e)$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg_i), u$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg_e)$ $\frac{\neg \neg \varphi}{\varphi} (\neg \neg_e)$

1. (2.0 pontos) Considere o cálculo da lógica proposicional, como apresentado na Tabela 1. Construa deduções para as seguintes regras derivadas:

(a) (1.0 ponto) Prova por contradição ou 
$$\frac{\begin{array}{c} [\neg \varphi]^u \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} (\perp_e), u$$

R/

$$\frac{\frac{\vdots}{\perp}}{\neg\neg\varphi} \frac{(\neg_i), u}{(\neg\neg_e)}$$

(b) (1.0 ponto) Lei do meio excluído ou  $\frac{}{(\varphi \vee \neg\varphi)}$  (*LEM*)

R/

$$\frac{\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u}{\perp} \frac{(\neg_i), v}{(\vee_i)} \frac{[\varphi]^v}{(\varphi \vee \neg\varphi)} (\vee_i)}{(\neg_e)} \frac{(\neg_e), u}{(\perp_e), u}$$

2. (4.0 pontos) Construa derivações para a Lei de De Morgan  $(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ .

(a) (2.0 pontos)  $(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ .

R/

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e) \quad [\neg\varphi]^x (\neg_e)}{\perp} \quad \frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge_e) \quad [\neg\psi]^y (\neg_e)}{\perp}}{(\vee_e), x, y} \frac{(\neg_i), u}{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}$$

(b) (2.0 pontos)  $(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ .

R/

$$\frac{\frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \quad \frac{[\neg\varphi]^x}{(\neg\varphi \vee \neg\psi)} (\vee_i)}{\perp} (\perp_e), x \quad \frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \quad \frac{[\neg\psi]^y}{(\neg\varphi \vee \neg\psi)} (\vee_i)}{\perp} (\perp_e), y}{(\wedge_i)} (\varphi \wedge \psi)$$

## SEMÂNTICA

3. (4.0 pontos) Utilize a técnica de solucionador SAT para demonstrar que a Lei de Pierce

$$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

é válida; i.e., demonstre que a negação da Lei de Pierce é insatisfazível, conforme os seguintes passos.

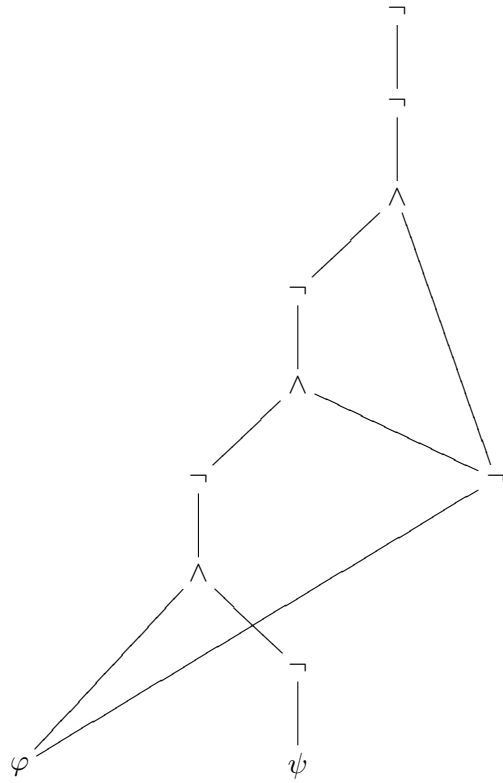


Figure 1: DAG para  $\neg\neg(\neg(\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg\varphi) \wedge \neg\varphi)$

- (a) (1.0 ponto) Transforme a negação da Lei de Pierce numa fórmula equivalente no fragmento negativo-conjuntivo da lógica proposicional, utilizando o operador  $T$  passo a passo;  
R/

$$\begin{aligned}
 & T(\neg(((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) = \\
 & \dots \\
 & \neg\neg(T((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \wedge \neg\varphi) = \\
 & \dots \\
 & \neg\neg(\neg(T(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\varphi) \wedge \neg\varphi) = \\
 & \dots \\
 & \neg\neg(\neg(\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg\varphi) \wedge \neg\varphi)
 \end{aligned}$$

- (b) (1.5 pontos) Construa um DAG para esta fórmula;  
R/ Veja Figura 1.
- (c) (1.5 pontos) Utilizando a técnica de solucionadores SAT, demonstre que esta fórmula é insatisfazível.  
R/ Veja Figura 2.

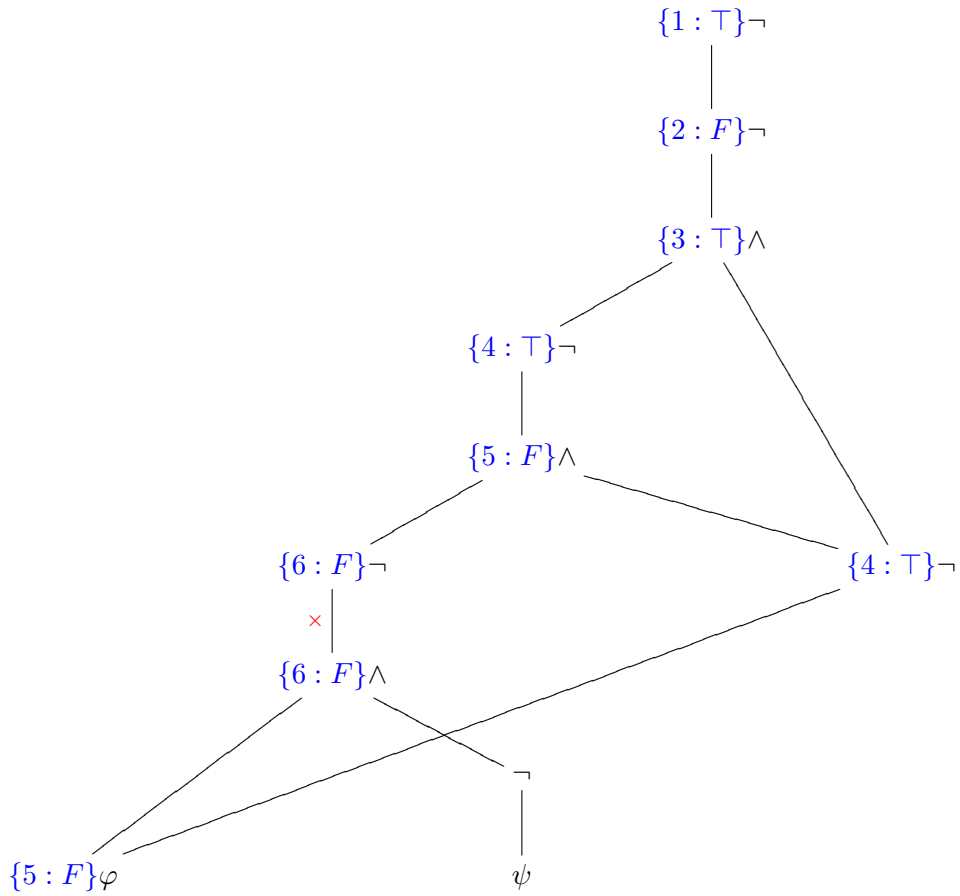


Figure 2: Verificação da (in)satisfazibilidade de  $\neg\neg(\neg(\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg\varphi) \wedge \neg\varphi)$