

LÓGICA COMPUTACIONAL  
 GABARITO DA PRIMEIRA PROVA  
 TÓPICOS: LÓGICA PROPOSICIONAL  
 SEMÂNTICA E DEDUÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
 18 DE SETEMBRO DE 2013  
 PROF. MAURICIO AYALA-RINCÓN  
 ESTAGIÁRIA DE DOCÊNCIA: ANA CRISTINA ROCHA OLIVEIRA VALVERDE

Nome:	Matrícula:
-------	------------

**Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 15:45; Duas páginas, Três questões**  
**Sobre respostas:** as provas devem ser elaboradas em dedução natural, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

Table 1: REGRAS DE DEDUÇÃO NATURAL PARA LÓGICA PROPOSICIONAL (CLÁSSICA)

introduction rules	elimination rules
$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_i)$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e)$
$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee_i)$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^v \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} (\vee_e), u, v$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i), u$	$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow_e)$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg_i), u$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg_e)$
	$\frac{\neg \neg \varphi}{\varphi} (\neg \neg_e)$

1. (3.0 pontos) Considere o cálculo da lógica proposicional clássica, como apresentado na Tabela 1.

Construa deduções para as seguintes regras deriváveis:

(a) (1.5 ponto) Prova por contradição ou  $\frac{[\neg\varphi]^u \quad \perp}{\varphi} (PBC), u$   
R/

$$\frac{[\neg\varphi]^u \quad \frac{\perp}{\neg\neg\varphi} (\neg_i), u}{\varphi} (\neg_e)$$

(b) (1.5 ponto) Lei do meio excluído ou  $\frac{}{(\varphi \vee \neg\varphi)} (LEM)$   
R/

$$\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \quad \frac{[\varphi]^v}{(\varphi \vee \neg\varphi)} (\vee_i)}{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u} (\neg_e)$$

$$\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \quad \frac{\perp}{\neg\varphi} (\neg_i), v}{(\varphi \vee \neg\varphi)} (\vee_i)}{\frac{\perp}{(\varphi \vee \neg\varphi)} (PBC), u} (\neg_e)$$

2. (4.0 pontos) Construa derivações para a Lei de De Morgan  $(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ .

(a) (2.0 pontos)  $(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ .  
R/

$$\frac{[\neg\varphi \vee \neg\psi]^u \quad \frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e) \quad [\neg\varphi]^x}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge_e) \quad [\neg\psi]^y}{\perp} (\neg_e)}{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)} (\vee_e), x, y} (\neg_i), u$$

(b) (2.0 pontos)  $(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ .  
R/

$$\frac{\frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \quad \frac{[\neg\varphi]^x}{(\neg\varphi \vee \neg\psi)} (\vee_i)}{\perp} (PBC), x \quad \frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \quad \frac{[\neg\psi]^y}{(\neg\varphi \vee \neg\psi)} (\vee_i)}{\perp} (PBC), y}{(\varphi \wedge \psi)} (\wedge_i)$$

3. (2.0 pontos) Demonstre de duas maneiras que a Lei de Pierce

$$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

é válida.

(a) (1.0 ponto) Semanticamente.

R/

$\varphi$	$\psi$	$(\varphi \rightarrow \psi)$	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

(b) (1.0 ponto) Por dedução natural. R/

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi} (\rightarrow_i) \emptyset \quad \frac{[\neg\psi]^v}{\neg\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{[\phi]^w}{\perp} (\neg_e)}{\psi} (\text{PBC}) v \\
 \frac{\psi}{\phi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) w \\
 \frac{[\neg\phi]^u \quad \frac{[(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi]^x}{\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e)}{\phi} (\text{PBC}) u \\
 \frac{\phi}{((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi} (\rightarrow_i) x
 \end{array}$$