

LÓGICA COMPUTACIONAL
GABARITO DA PRIMEIRA PROVA
 TÓPICOS: LÓGICA PROPOSICIONAL
 SEMÂNTICA E DEDUÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
 17 DE SETEMBRO DE 2014
 PROF. MAURICIO AYALA-RINCÓN
 ESTAGIÁRIA DE DOCÊNCIA: ARIANE ALVES ALMEIDA

Nome:	Matrícula:
-------	------------

Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 15:45; Duas páginas, Três questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

Table 1: REGRAS DE DEDUÇÃO NATURAL PARA LÓGICA PROPOSICIONAL (CLÁSSICA)

introduction rules	elimination rules
$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_i)$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e)$
$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee_i)$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^v \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} (\vee_e), u, v$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i), u$	$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow_e)$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg_i), u$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg_e)$
	$\frac{\neg \neg \varphi}{\varphi} (\neg \neg_e)$

1. (3.0 pontos) Considere o cálculo de dedução natural para a lógica proposicional clássica, como apresentado na Tabela 1.

Construa deduções para as seguintes regras deriváveis:

(a) (1.5 ponto) Prova por contradição ou $\frac{[\neg\varphi]^u \quad \perp}{\varphi} (PBC), u$

$$\frac{\frac{[\neg\varphi]^u \quad \perp}{\neg\neg\varphi} (\neg_i), u}{\varphi} (\neg\neg_e)$$

(b) (1.5 ponto) Lei do meio excluído ou $\frac{}{(\varphi \vee \neg\varphi)} (LEM)$

$$\frac{\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \quad \frac{[\varphi]^v}{(\varphi \vee \neg\varphi)} (\vee_i)}{\perp} (\neg_e)}{\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \quad \frac{\perp}{(\varphi \vee \neg\varphi)} (\vee_i)}{\perp} (\neg_e)} (\neg_e) \quad (PBC), u$$

2. (4.0 pontos) Construa derivações para a Lei de De Morgan $(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

(a) (2.0 pontos) $(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e) \quad [\neg\varphi]^x (\neg_e) \quad \perp}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee_e), x, y}{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge_e) \quad [\neg\psi]^y (\neg_e) \quad \perp}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee_e), x, y}}{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)} (\neg_i), u$$

(b) (2.0 pontos) $(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

$$\frac{\frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \quad \frac{[\neg\varphi]^x}{(\neg\varphi \vee \neg\psi)} (\vee_i)}{\perp} (\neg_e) \quad (PBC), x}{\frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \quad \frac{[\neg\psi]^y}{(\neg\varphi \vee \neg\psi)} (\vee_i)}{\perp} (\neg_e) \quad (PBC), y}}{(\varphi \wedge \psi)} (\wedge_i)$$

3. (3.0 pontos) Demonstre de duas maneiras que a Lei de Pierce

$$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

é válida.

(a) (1.0 ponto) Semanticamente.

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$
<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>

(b) (2.0 ponto) Por dedução natural.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi} (\rightarrow_i) \emptyset \quad \frac{[\neg\psi]^v}{\neg\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{[\phi]^w}{\psi} (\neg_e)}{\perp} (\text{PBC}) v \\
 \frac{\frac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi} (\rightarrow_i) \emptyset \quad \frac{[\neg\psi]^v}{\neg\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{[\phi]^w}{\psi} (\neg_e)}{\psi} (\text{PBC}) v \\
 \frac{\frac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi} (\rightarrow_i) \emptyset \quad \frac{[\neg\psi]^v}{\neg\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{[\phi]^w}{\psi} (\neg_e)}{\phi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) w \\
 \frac{\frac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi} (\rightarrow_i) \emptyset \quad \frac{[\neg\psi]^v}{\neg\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{[\phi]^w}{\psi} (\neg_e)}{\phi} (\rightarrow_e) \\
 \frac{\frac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi} (\rightarrow_i) \emptyset \quad \frac{[\neg\psi]^v}{\neg\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{[\phi]^w}{\psi} (\neg_e)}{\phi} (\text{PBC}) u \\
 \frac{\frac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi} (\rightarrow_i) \emptyset \quad \frac{[\neg\psi]^v}{\neg\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{[\phi]^w}{\psi} (\neg_e)}{((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi} (\rightarrow_i) x
 \end{array}$$