Lógica Computacional 1 — Turma A
Primeira Prova (Gabarito)

Indução e Cálculo Proposicional

Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

15 de Abril de 2015

Duração: 110 min
Início: 16:00h - Término: 17:50h

Nome:	Matrícula:

1. (2 pontos) Prove por indução estrutural que fórmulas bem formadas da lógica proposicional são balanceadas no sentido de ter igual número de parêntesis esquerdos e direitos. Lembre que neste caso, a prova indutiva, basea-se na definião recursiva da sintaxe das fórmulas bem formadas:

$$\phi ::= V \;\; || \;\; \bot \;\; || \;\; \top \;\; || \;\; (\neg\phi) \;\; || \;\; (\phi \wedge \phi) \;\; || \;\; (\phi \vee \phi) \;\; || \;\; (\phi \to \phi)$$

   Solução.
   (BI) As constantes $\bot$ e $\top$ assim como variáveis v em V, tem zero parêntesis. Assim, todas as fórmulas básicas são balanceadas.

   (PI) Caso $\varphi = (\neg\psi)$. Por hipótese de indução ψ tem igual número de "("que de ")", $|\psi|_(= |\psi|_)$, consequentemente o balanceamento vale para a fórmula $(\neg\psi)$ na qual um parêntesis á esquerda e um a direita são adicionados: $|(\neg\psi)|_(= |\psi|_(+ 1 =_{i.h.} |\psi|_) + 1 = |(\neg\psi)|_)$.

   Casos $\varphi = (\psi \,\Box\, \phi)$, onde $\Box \in \{\wedge, \vee, \to\}$. Por hipótese de indução, tanto ψ quanto ϕ tem igual número de "("que de ")", $|\psi|_(= |\psi|_)$ e $|\phi|_(= |\phi|_)$ resp., consequentemente o balanceamento vale para a fórmula $(\psi\Box\phi)$ na qual um parêntesis á esquerda e um a direita são adicionados: $|(\psi\Box\phi)|_(= |\psi|_(+ |\phi|_(+ 1 =_{i.h.} |\psi|_) + |\phi|_) + 1 = |(\psi\Box\phi)|_)$.

2. (8 pontos) O sistema de dedução natural para o cálculo proposicional clássico é dado na Tabela 1. O cálculo para a lógica intuicionista troca a regra (PBC) pela regra de eliminação do absurdo sem possibilidade de descarga de suposições:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u \qquad\qquad \rightsquigarrow \qquad\qquad \dfrac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)$$

Tabela 1: Regras de dedução natural para a lógica proposicional clássica

introdução	eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u$

(a) (2 pontos) Apresente uma árvore de derivação no cálculo para a lógica clássica de

$$(\neg\psi \to \phi) \vdash (\neg\phi \to \psi)$$

(b) (2 pontos) Apresente uma árvore de derivação no cálculo puramente intuicionista de

$$(\psi \to \neg\phi) \vdash (\phi \to \neg\psi)$$

(c) (1 ponto) Utilizando a regra de contraposição (CP_3) derivada do item 2a,

$$\frac{(\neg\psi \to \phi)}{(\neg\phi \to \psi)}\ (\text{CP}_3)$$

apresente uma derivação para $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$.

Nota: sempre que a regra $(\neg\neg_e)$ não é intuicionista e a derivação utiliza somente regras intuicionistas, exceto pela aplicação de (CP_3), pode-se concluir que esta versão de contraposição não é intuicionista.

Solução:

$(\neg\psi \to \phi) \vdash (\neg\phi \to \psi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\psi \to \phi \qquad [\neg\psi]^y}{\phi}\,(\to_e) \qquad [\neg\phi]^x}{\bot}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\text{PBC})\ y}{\neg\phi \to \psi}\,(\to_i)\ x$$

$(\psi \to \neg\phi) \vdash (\phi \to \neg\psi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \to \neg\phi \qquad [\psi]^y}{\neg\phi}\,(\to_e) \qquad [\phi]^x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\psi}\,(\neg_i)\ y}{\phi \to \neg\psi}\,(\to_i)\ x$$

$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$:

$$\dfrac{\neg\neg\varphi \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^x}{\neg\varphi \to \neg\varphi}\,(\to_i)\ x}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,(\text{CP}_3)}{\varphi}\,(\to_e)$$

(d) (3 pontos) Este ponto trata de leis de De Morgan. Apresente árvores de derivação para

$$\neg(\phi \lor \psi) \dashv\vdash (\neg\phi \land \neg\psi)$$

Nota: derivações no cálculo intuicionista são possíveis. No sentido "$\vdash$"pode supor ϕ e ψ e junto com a premissa deduzir $\neg\phi$ e $\neg\psi$, respectivamente; no outro sentido,"$\dashv$", ao supor $(\phi \lor \psi)$ pode-se deduzir o absurdo.

Solução:

Da esquerda para a direita, tem-se a derivação abaixo.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \neg(\phi \vee \psi) \qquad \dfrac{[\phi]^u}{\phi \vee \psi}\,(\vee_i)
    }{\bot}\,(\neg_e)
  }{\neg\phi}\,(\neg_i)\ u
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \neg(\phi \vee \psi) \qquad \dfrac{[\psi]^v}{\phi \vee \psi}\,(\vee_i)
    }{\bot}\,(\neg_e)
  }{\neg\psi}\,(\neg_i)\ v
}{\neg\phi \wedge \neg\psi}\,(\wedge_i)
$$

Da direita para a esquerda, tem-se a derivação abaixo.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    [(\phi \vee \psi)]^u
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{(\neg\phi \wedge \neg\psi)}{\neg\phi}\,(\wedge_e) \qquad [\phi]^x
    }{\bot}\,(\neg_e)
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{(\neg\phi \wedge \neg\psi)}{\neg\psi}\,(\wedge_e) \qquad [\psi]^y
    }{\bot}\,(\neg_e)
  }{\bot}\,(\vee_e)\ x, y
}{\neg(\phi \vee \psi)}\,(\neg_i)\ u
$$