Lógica Computacional 1 — Turma A
Primeira Prova (Gabarito)

Indução e Cálculo Proposicional

Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

16 de Setembro de 2015

Duração: 110 min
Início: 16:00h - Término: 17:50h

Nome:	Matrícula:

1. (2 pontos) Prove por indução estrutural que fórmulas bem formadas da lógica proposicional são balanceadas no sentido de ter igual número de parêntesis esquerdos e direitos. Lembre que neste caso, a prova indutiva, basea-se na definião recursiva da sintaxe das fórmulas bem formadas:

$$\phi ::= V \ \| \ \perp \ \| \ \top \ \| \ (\neg\phi) \ \| \ (\phi \wedge \phi) \ \| \ (\phi \vee \phi) \ \| \ (\phi \rightarrow \phi)$$

Solução.
(BI) As constantes $\perp$ e $\top$ assim como variáveis v em V, tem zero parêntesis. Assim, todas as fórmulas básicas são balanceadas.

(PI) Caso $\varphi = (\neg\psi)$. Por hipótese de indução ψ tem igual número de "("que de ")", $|\psi|_(= |\psi|_)$, consequentemente o balanceamento vale para a fórmula $(\neg\psi)$ na qual um parêntesis á esquerda e um a direita são adicionados: $|(\neg\psi)|_(= |\psi|_(+ 1 =_{i.h.} |\psi|_) + 1 = |(\neg\psi)|_)$.

Casos $\varphi = (\psi \,\Box\, \phi)$, onde $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Por hipótese de indução, tanto ψ quanto ϕ tem igual número de "("que de ")", $|\psi|_(= |\psi|_)$ e $|\phi|_(= |\phi|_)$ resp., consequentemente o balanceamento vale para a fórmula $(\psi\Box\phi)$ na qual um parêntesis á esquerda e um a direita são adicionados: $|(\psi\Box\phi)|_(= |\psi|_(+ |\phi|_(+ 1 =_{i.h.} |\psi|_) + |\phi|_) + 1 = |(\psi\Box\phi)|_)$.

2. (4 pontos) O sistema de dedução natural para o cálculo proposicional clássico é dado na Tabela 1. O cálculo para a lógica intuicionista troca a regra (PBC) pela regra de eliminação do absurdo sem possibilidade de descarga de suposições:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u \qquad\rightsquigarrow\qquad \dfrac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)$$

Tabela 1: Regras de dedução natural para a lógica proposicional clássica

introdução	eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ (\rightarrow_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u$

Um resultado interessante em teoria da prova estabelece que provabilidade construtiva ou intuicionista e provabilidade em geral ou clássica são equivalentes no seguinte sentido:

> Se $\vdash \varphi$ na lógica proposicional clássica então $\vdash \neg\neg\varphi$ na lógica proposicional intuicionista.

(a) (2 pontos) Apresente uma árvore de derivação de $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.
Solução:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^v}{(\varphi \vee \neg\varphi)}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\varphi}\,(\text{PBC})\ v}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\text{PBC})\ u$$

(b) (2 pontos) Apresente uma árvore de derivação no cálculo puramente intuicionista de $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$.
Nota: a prova do item precedente com pequenas mudanças aplica.

Solução:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{[\varphi]^v}{(\varphi \vee \neg\varphi)}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\ v}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\neg_i)\ u$$

3. (4 pontos) Este ponto trata de leis de De Morgan. Apresente árvores de derivação para

$$\neg(\phi \vee \psi) \dashv\vdash (\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

Nota: derivações no cálculo intuicionista são possíveis. No sentido "$\vdash$"pode supor ϕ e ψ e junto com a premissa deduzir $\neg\phi$ e $\neg\psi$, respectivamente; no outro sentido,"$\dashv$", ao supor $(\phi \vee \psi)$ pode-se deduzir o absurdo.

Solução:

Da esquerda para a direita, tem-se a derivação abaixo.

$$\dfrac{(\neg_i)\ u\,\dfrac{(\neg_e)\,\dfrac{\neg(\phi \vee \psi) \qquad (\vee_i)\,\dfrac{[\phi]^u}{\phi \vee \psi}}{\bot}}{\neg\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\phi \vee \psi) \qquad \dfrac{[\psi]^v}{\phi \vee \psi}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\psi}\,(\neg_i)\ v}{\neg\phi \wedge \neg\psi}\,(\wedge_i)$$

Da direita para a esquerda, tem-se a derivação abaixo.

$$\dfrac{\dfrac{[(\phi \vee \psi)]^u \qquad (\neg_e)\,\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\neg\phi \wedge \neg\psi)}{\neg\phi} \qquad [\phi]^x}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{(\neg\phi \wedge \neg\psi)}{\neg\psi}\,(\wedge_e) \qquad [\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\bot}\,(\vee_e)\ x, y}{\neg(\phi \vee \psi)}\,(\neg_i)\ u$$