Lógica Computacional 1 — Turma A
Primeira Prova (Gabarito)

Indução e Cálculo Proposicional

Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

11 de Abril de 2016

Duração: 110 min
Início: 16:00h - Término: 17:50h

Nome:	Matrícula:

1. (6 pontos) Prove que fórmulas proposicionais no *fragmento negativo* satisfazem o seguinte:

$$\vdash_M \phi \leftrightarrow \neg\neg\phi$$

A notação "$\vdash_M$"significa que a derivação utiliza o cálculo proposicional minimal, cáculo que exclui as regras de absurdo (tanto intuicionista quanto clássico: Tab. 1 sem regra (PBC)). Uma fórmula está no *fragmento negativo* se não contém disjunções ($\vee$) e todas as variáveis proposicionais ocorrem negadas. Fórmulas no fragmento negativo tem então a seguinte sintaxe:

$$\phi ::= (\neg v) \;\;||\;\; \bot \;\;||\;\; (\neg\phi) \;\;||\;\; (\phi \wedge \phi) \;\;||\;\; (\phi \to \phi), \quad \text{para } v \in V$$

Roteiro da prova: Para o sentido $\vdash_M \phi \to \neg\neg\phi$ basta observar que a introdução da dupla negação ($\neg\neg_i$) deriva-se sem utilizar regras para o absurdo. Para o sentido $\vdash_M \neg\neg\phi \to \phi$, que é o que iremos a provar, usa-se indução na estrutura da fórmula ϕ. Para a **base da indução**:

(a) (1 ponto) Construa derivações para $\vdash_M \neg\neg(\neg v) \to (\neg v)$ e $\vdash_M \neg\neg\bot \to \bot$.

O **passo indutivo** requer a análise de negação ($\neg\psi$), conjunção ($\psi \wedge \varphi$) e implicação ($\psi \to \varphi$) de fórmulas ψ e φ no fragmento negativo. Construa derivações minimais para:

(b) (1 ponto) $\vdash_M \neg\neg\neg\psi \to \neg\psi$;

(c) (2 pontos) $\vdash_M \neg\neg(\psi \wedge \varphi) \to (\psi \wedge \varphi)$;

(d) (2 pontos) $\vdash_M \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$.

Ajuda Para itens (c) e (d), pode usar regras derivadas dos exercícios:
$\neg\neg(\psi \wedge \varphi) \vdash_M (\neg\neg\psi \wedge \neg\neg\varphi)$ (-0.5 pontos) e $\neg\neg(\psi \to \varphi) \vdash_M (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$ (-0.5 pontos).

Solução.

(BI)

- $\vdash_M \neg\neg\neg v \to \neg v$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg v \qquad \dfrac{[v]^x}{\neg\neg v}\,(\neg\neg_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg v}\,(\neg_i)\; x$$

- $\vdash_M \neg\neg\bot \to \bot$:

$$\dfrac{\neg\neg\bot \qquad \dfrac{[\bot]^x}{\neg\bot}\,(\to_i)\; x}{\bot}\,(\neg_e)$$

(PI)

- **Caso** $(\neg\psi)$. $\vdash_M \neg\neg\neg\psi \to \neg\psi$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg\psi \qquad \dfrac{[\psi]^x}{\neg\neg\psi}\,(\neg\neg_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\psi}\,(\neg_i)\; x$$

- **Caso** $(\psi \wedge \varphi)$. $\vdash_M \neg\neg(\psi \wedge \varphi) \to (\psi \wedge \varphi)$:
  Primeiro, seja ∇_0 a seguinte derivação para $\neg\neg(\psi \wedge \varphi) \vdash_M \neg\neg\psi \wedge \neg\neg\varphi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg(\psi\wedge\varphi)]^z \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^u \qquad \dfrac{[\psi\wedge\varphi]^v}{\psi}\,(\wedge_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\psi\wedge\varphi)}\,(\neg_i)\; v}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\psi}\,(\neg_i)\; u \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\neg(\psi\wedge\varphi)]^z \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^x \qquad \dfrac{[\psi\wedge\varphi]^y}{\varphi}\,(\wedge_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\psi\wedge\varphi)}\,(\neg_i)\; y}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_i)\; x}{\neg\neg\psi \wedge \neg\neg\varphi}\,(\wedge_i)$$

  Por hipótese de indução, existem provas ∇_1 e ∇_2 para $\vdash_M \neg\neg\psi \to \psi$ e $\vdash_M \neg\neg\varphi \to \varphi$, respectivamente. Obtem-se a prova como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\nabla_0}{\neg\neg\psi\wedge\neg\neg\varphi}}{\neg\neg\psi}\,(\wedge_e)}{\nabla_1}}{\psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\nabla_0}{\neg\neg\psi\wedge\neg\neg\varphi}}{\neg\neg\varphi}\,(\wedge_e)}{\nabla_2}}{\varphi}}{\dfrac{\psi\wedge\varphi}{\neg\neg(\psi\wedge\varphi) \to (\psi\wedge\varphi)}\,(\to_i)\; z}\,(\wedge_i)$$

- **Caso** $(\psi \to \varphi)$. $\vdash_M \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$: Primeiro, seja ∇_0 a derivação abaixo para $\neg\neg(\psi \to \varphi) \vdash_M (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\neg(\phi \to \psi)]^z$}
\AxiomC{$[\neg\neg\phi]^u$}
\AxiomC{$[\neg\psi]^v$}
\AxiomC{$[\phi \to \psi]^x$}
\AxiomC{$[\phi]^y$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ y$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\neg(\phi \to \psi)$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi$}
\end{prooftree}
$$

Por hipótese de indução, existe derivação $\nabla_1 \vdash_M \neg\neg\varphi \to \varphi$. Obtem-se a prova como segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\psi]^y$}
\AxiomC{∇_0}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi$}
\AxiomC{$[\psi]^x$}
\RightLabel{$(\neg\neg_i)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\varphi$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$\neg\neg\varphi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\psi \to \neg\neg\varphi$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$\neg\neg\varphi$}
\UnaryInfC{∇_1}
\UnaryInfC{φ}
\RightLabel{$(\to_i)\ y$}
\UnaryInfC{$(\psi \to \varphi)$}
\RightLabel{$(\to_i)\ z$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$}
\end{prooftree}
$$

2. (4 pontos) O sistema de dedução natural para o cálculo proposicional clássico é dado na Tabela 1. O cálculo para a lógica intuicionista troca a regra (PBC) pela regra de eliminação do absurdo sem possibilidade de descarga de suposições:

$$
\begin{array}{c}
[\neg\varphi]^u \\
\vdots \\
\bot \\
\hline
\varphi
\end{array}\ (\mathrm{PBC})\ u
\qquad \rightsquigarrow \qquad
\frac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)
$$

Um resultado interessante em teoria da prova estabelece que provabilidade construtiva ou intuicionista e provabilidade em geral ou clássica são equivalentes no seguinte sentido:

> Se $\vdash \varphi$ na lógica proposicional clássica então $\vdash \neg\neg\varphi$ na lógica proposicional intuicionista.

(a) (2 pontos) Apresente uma árvore de derivação de $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

Tabela 1: Regras de dedução natural para a lógica proposicional clássica

introdução	eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u$

Solução:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^v}{(\varphi \vee \neg\varphi)}\ (\vee_i)}{\bot}\ (\neg_e)}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ v}{\varphi \vee \neg\varphi}\ (\vee_i)}{\bot}\ (\neg_e)}{\varphi \vee \neg\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u$$

(b) (2 pontos) Apresente uma árvore de derivação no cálculo puramente intuicionista de $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$.
Nota: a prova do item precedente com pequenas mudanças aplica.
Solução:

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u \qquad \dfrac{[\varphi]^v}{(\varphi \vee \neg\varphi)}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\ v}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\neg_i)\ u
$$