Lógica Computacional 1 — Turma A
Primeira Prova (Gabarito)

Indução e Cálculo Proposicional

Prof. Mauricio Ayala Rincón
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

19 de Setembro de 2016

Duração: 110 min
Início: 16:00h - Término: 17:50h

Nome:	Matrícula:

1. (3 pontos) Prove por indução estrutural que fórmulas bem formadas da lógica proposicional são balanceadas no sentido de ter igual número de parêntesis esquerdos e direitos. Lembre que neste caso, a prova indutiva, basea-se na definião recursiva da sintaxe das fórmulas bem formadas:

$$\phi ::= V \;\;||\;\; \bot \;\;||\;\; \top \;\;||\;\; (\neg\phi) \;\;||\;\; (\phi \wedge \phi) \;\;||\;\; (\phi \vee \phi) \;\;||\;\; (\phi \rightarrow \phi)$$

Solução.
(BI) As constantes $\bot$ e $\top$ assim como variáveis v em V, tem zero parêntesis. Assim, todas as fórmulas básicas são balanceadas.

(PI) Caso $\varphi = (\neg\psi)$. Por hipótese de indução ψ tem igual número de "("que de ")", $|\psi|_(= |\psi|_)$, consequentemente o balanceamento vale para a fórmula $(\neg\psi)$ na qual um parêntesis á esquerda e um a direita são adicionados: $|(\neg\psi)|_(= |\psi|_(+ 1 =_{i.h.} |\psi|_) + 1 = |(\neg\psi)|_)$.

Casos $\varphi = (\psi \,\Box\, \phi)$, onde $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Por hipótese de indução, tanto ψ quanto ϕ tem igual número de "("que de ")", $|\psi|_(= |\psi|_)$ e $|\phi|_(= |\phi|_)$ resp., consequentemente o balanceamento vale para a fórmula $(\psi\Box\phi)$ na qual um parêntesis á esquerda e um a direita são adicionados: $|(\psi\Box\phi)|_(= |\psi|_(+ |\phi|_(+ 1 =_{i.h.} |\psi|_) + |\phi|_) + 1 = |(\psi\Box\phi)|_)$.

2. (7 pontos) O sistema de dedução natural para o cálculo proposicional clássico é dado na Tabela 1. O cálculo para a lógica intuicionista troca a regra (PBC) pela regra de eliminação do absurdo sem possibilidade de descarga de suposições:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)
$$

Tabela 1: Regras de dedução natural para a lógica proposicional clássica

introdução	eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u$

O teorema de Glivenko estabelece que dados Γ um conjunto finito de fórmulas, e φ uma fórmula qualquer da lógica proposicional. Se φ tem uma prova clássica a partir de Γ, denotado $\Gamma \vdash_c \varphi$, então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ, denotado $\Gamma \vdash_i \varphi$, ou seja,

$$\Gamma \vdash_c \varphi \text{ implica } \Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$$

Assim, por exemplo $\neg\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi)$ e $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ são prováveis no cálculo intuicionista, sempre que $\vdash_c \neg\neg\varphi \to \varphi$ e $\vdash_c \varphi \vee \neg\varphi$.

Considerando a derivação abaixo de $\vdash_c \varphi \vee \neg\varphi$, não é possível adatar essa prova no cálculo intuicionista, mas sim é possível adatar essa prova no cálculo intuicionista para derivar $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u$}
\AxiomC{$[\neg\varphi]^v$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$(\varphi \vee \neg\varphi)$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) v}
\UnaryInfC{φ}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \neg\varphi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) u}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \neg\varphi$}
\end{prooftree}
$$

(a) (3 pontos) Apresente uma árvore de derivação no cálculo puramente intuicionista de $\vdash_i \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$.

Solução:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u$}
\AxiomC{$[\varphi]^v$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$(\varphi \vee \neg\varphi)$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)$ v}
\UnaryInfC{$\neg\varphi$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \neg\varphi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)$ u}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$}
\end{prooftree}
$$

Considerando as derivações a seguir, da demonstração indutiva do teorema de Glivenko para as regras $(\rightarrow_e)$ e $(\rightarrow_i)$, deseja-se obter derivações para os casos das regras $(\neg_e)$ e $(\neg_i)$.

$(\rightarrow_i)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \quad [\varphi_1]^x$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{φ_2}
\RightLabel{$(\rightarrow_i)$ x}
\UnaryInfC{$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$}
\end{prooftree}
$$

Por hipótese de indução, temos que existe uma derivação $\Gamma, \varphi_1 \vdash_i \neg\neg\varphi_2$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi_1]^w \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi_2]^z \qquad \begin{matrix}\Gamma\ [\varphi_1]^x\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_2\end{matrix}}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi_1}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi_2}\,(\neg_i)\ z}{(\neg\neg\varphi_1) \to (\neg\neg\varphi_2)}\,(\to_i)\ w}{\neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)}\ \textsc{Exercício}\ (6.b)$$

$(\to_e)$: Neste caso, a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \varphi_1 \to \varphi\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \varphi_1\end{matrix}}{\varphi}\ (\to_e)$$

Por hipótese de indução, temos que existem derivações $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi)$ e $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_1$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi)\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_1\end{matrix} \qquad \dfrac{[\varphi_1 \to \varphi]^x \qquad [\neg\varphi]^y}{\neg\varphi_1}\,(\text{MT})}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\varphi_1 \to \varphi)}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_i)\ y$$

(b) (2 pontos) Desenvolva o caso da regra $(\neg_i)$; i.e., construa uma derivação para $\Gamma \vdash_i \neg\neg\neg\phi$ usando a h.i. da derivação clássica abaixo:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \quad [\varphi]^x\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ x$$

Note que hipótese de indução é que existe uma derivação intuicionista assim:

$$\begin{array}{c}\Gamma\ [\varphi]^x\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\bot\end{array}$$

Solução.

Pode ser obtida uma derivação como abaixo ajustando a derivação apra o caso da regra $(\neg_i)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi]^w \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\bot]^z \qquad \begin{array}{c}\Gamma\ [\varphi]^x\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\bot\end{array}}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\bot}\,(\neg_i)\ z}{(\neg\neg\varphi)\to(\neg\neg\bot)}\,(\to_i)\ w}{\neg\neg(\varphi\to\bot)}\,\text{Exercício } (6.b)$$

Notando que a suposição $[\neg\bot]^z$ na última derivação é desnecessária, sempre que $\vdash_i \neg\bot$, a prova pode ser melhorada como abaixo.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi]^w \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bot]^z}{\neg\bot}\,(\neg_i)\ z \qquad \begin{array}{c}\Gamma\ [\varphi]^x\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\bot\end{array}}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\,(\to_i)\ w$$

(c) (2 pontos) Desenvolva o caso da regra $(\neg_e)$; i.e., construa uma derivação para $\Gamma \vdash_i \neg\neg\bot$ usando a h.i. da derivação clássica abaixo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \neg\varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi\end{array}}{\bot}\,(\neg_e)$$

Note que a hipótese de indução é que existem derivações intuicionistas assim:

$$
\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\neg\varphi\end{array}
\qquad e \qquad
\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi\end{array}
$$

Solução.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\neg\varphi\end{array}$}
\AxiomC{$\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi\end{array}$}
\AxiomC{$[\neg\varphi]^x$}
\AxiomC{$[\varphi]^z$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ z$}
\UnaryInfC{$\varphi \to \bot$}
\AxiomC{$[\neg\bot]^y$}
\RightLabel{(MT)}
\BinaryInfC{$\neg\varphi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\varphi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ y$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\bot$}
\end{prooftree}
$$