Lógica Computacional 1 — Turma A
Primeira Prova (Gabarito)

Indução e Cálculo Proposicional

Prof. Mauricio Ayala Rincón
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

17 de Abril de 2017

Duração: 110 min
Duas páginas, duas questões
Início: 16:00h - Término: 17:50h

Nome:	Matrícula:

1. (4 pontos) Prove que prefixos próprios de fórmulas bem formadas da lógica proposicional não são fórmulas bem formadas. Lembre que provas indutivas nas fórmulas baseam-se na definião recursiva da sintaxe das fórmulas bem formadas:

$$\phi ::= V \;\;||\;\; \bot \;\;||\;\; \top \;\;||\;\; (\neg\phi) \;\;||\;\; (\phi \wedge \phi) \;\;||\;\; (\phi \vee \phi) \;\;||\;\; (\phi \rightarrow \phi)$$

Nota: diz-se que uma palavra s é prefixo próprio da palavra t, denotado $s \sqsubset t$, se $s \neq t$ e s é prefixo de t ($s \sqsubseteq t$).

Ajuda: pode utilizar os fatos de que para fórmulas bem formadas φ, vale: $|\varphi|_(= |\varphi|_)$; se $s \sqsubset \varphi$, então $|s|_(\geq |s|_)$; e que a palavra vazia, ϵ, não é uma fórmula bem formada.

Solução Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

- Se φ for uma constante ou variável proposicional então a propriedade vale, uma vez que $s \sqsubset \varphi$ implica $s = \epsilon$, que não é uma fórmula bem formada.
- Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então os possíveis prefixos próprios de φ, $s \sqsubset \varphi$, são $\epsilon, ($ e $(\neg s'$, onde $s' \sqsubseteq \varphi_1$. O primeiro caso não é possível. O segundo caso não é possível, sempre que fórmulas bem formadas são balanceadas, mas $|(|_(= 1 > 0 = |(|_)$. Para $s = (\neg s'$, sempre que temos que $|(\neg s'|_(> |(\neg s'|_)$ como consequência de $|s'|_(\geq |s'|_)$.
- Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então os possíveis prefixos próprios de φ são $\epsilon, (s_1$ e $(\varphi_1 \star s_2$, onde $s_i \sqsubseteq \varphi_i$ $(i \in \{1,2\})$. No primeiro caso, ϵ no é fórmula bem formada. Para o segundo caso, $|s_1|_(\geq |s_1|_)$ implica $|(s_1|_(> |(s_1|_)$; assim $(s_1$ não pode ser uma fórmula bem formada. Finalmente, se $s = (\varphi_1 \star s_2$, sempre que $|\varphi_i|_(= |\varphi_i|_)$ e $|s_2|_(\geq |s_2|_)$ implica $|(\varphi_1 \star s_2|_(> |(\varphi_1 \star s_2|_)$, $(\varphi_1 \star s_2$ não pode ser uma fórmula bem formada.

2. (6 pontos) O objetivo é demonstrar que a Lei de Peirce é estritamente clássica e que o cálculo de dedução natural para a lógica minimal com a Lei de Peirce e $(\bot_e)$ é equivalente ao cálculo de dedução para a lógica clássica.

   (a) (2 pontos) Demonstre que a Lei de Peirce $(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$ não é uma propriedade da lógica intuicionista, i.e., é um teorema estritamente clássico; para isso apresente uma derivação de $\neg\neg\varphi \to \varphi$ que supõe a Lei de Peirce e usa unicamente regras intuicionistas. Observe, que com essa demonstração tem-se também uma derivação da regra $(\neg\neg_e)$:

$$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\,(\neg\neg_e)$$

   Ajuda: instâncie na Lei de Peirce a fórmula ψ como $\bot$.

   Usa-se a seguinte instância da Lei de Peirce: $((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi = (\varphi \to \bot) \to \bot]^u \qquad [\neg\varphi = \varphi \to \bot]^v}{\bot}\,(\to_e)}{\varphi}\,(\bot_e)}{(\varphi \to \bot) \to \varphi}\,(\to_i)\ v \qquad ((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi\ (\text{L.Peirce})}{\varphi}\,(\to_e)}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,(\to_i)\ u$$

   (b) (2 pontos) Apresente uma derivação do cálculo intuicionista e supondo a Lei de Peirce da regra (PBC) :

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\,(\text{PBC})\ u$$

   Ajuda: a mesma instância da Lei de Peirce do item anterior será de utilidade.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi = \varphi \to \bot]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\,(\bot_e)}{(\varphi \to \bot) \to \varphi}\,(\to_i)\ u \qquad ((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi\ (\text{L.Peirce})}{\varphi}\,(\to_e)$$

   (c) (2 pontos) Finalmente, apresente uma derivação do cálculo intuicionista e supondo a Lei de Peirce de (LEM):

$$(\varphi \vee \neg\varphi) \quad (\text{LEM})$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\varphi]^v$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$(\varphi \vee \neg\varphi)$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u$}
\noLine
\UnaryInfC{}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\UnaryInfC{φ}
\RightLabel{$(\to_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \to \varphi$}
\AxiomC{(L.P.)1}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{φ}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \neg\varphi$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \neg\varphi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to (\varphi \vee \neg\varphi)$}
\AxiomC{(L.P.)2}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$(\varphi \vee \neg\varphi)$}
\end{prooftree}
$$

Onde (L.P.)1 e (L.P.)2 são respectivamente as seguintes instancias da Lei de Peirce: $((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi$ e $(((\varphi \vee \neg\varphi) \to \bot) \to (\varphi \vee \neg\varphi)) \to (\varphi \vee \neg\varphi)$.

Tabela 1: Regras de dedução natural para a lógica proposicional clássica

introdução	eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\text{PBC})\ u$